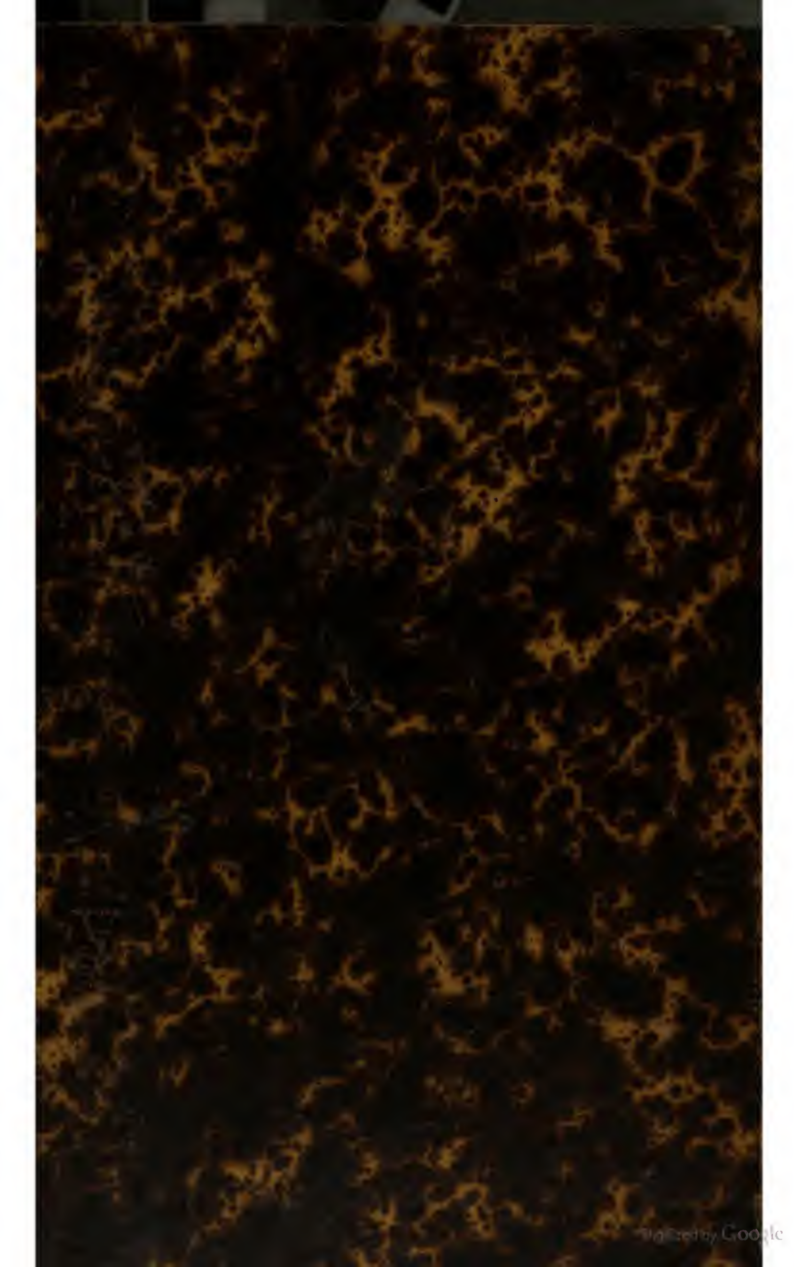


ÉLÉMENTS

DE GÉOMÉTRIE.



PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

ÉLÉMENTS
DE GÉOMÉTRIE

ENTIÈREMENT CONFORMES AUX DERNIERS PROGRAMMES D'ENSEIGNEMENT
DES CLASSES DE TROISIÈME, DE SECONDE, DE RHÉTORIQUE ET DE PHILOSOPHIE,

SUIVIS D'UN

COMPLÉMENT

A L'USAGE DES ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES
ET DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ET DE

NOTIONS SUR LE LEVER DES PLANS ET L'ARPENTAGE,

PAR

EUGÈNE ROUCHÉ,
Professeur au Lycée Charlemagne, Répétiteur à l'École Polytechnique.

CH. DE COMBEROUSSE,
Professeur à l'École Centrale et au Collège Chaptal.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1867

PRÉFACE.

Lorsque nous avons publié l'année dernière un *Traité* complet de Géométrie, notre ambition était d'apporter notre pierre à l'édifice, et d'aider à faire un pas en avant, en propageant les méthodes nouvelles dont la Science s'est enrichie depuis un demi-siècle. De précieux suffrages sont venus récompenser nos efforts, et nous donner la conviction qu'ils ne resteraient pas stériles.

Ce succès même nous a engagés à satisfaire au désir de notre bienveillant Éditeur, et à écrire un livre plus simple qui pût répondre aux besoins du plus grand nombre. Ce sont les *Éléments* que nous publions aujourd'hui. Bien que conçus suivant le même ordre d'idées que le *Traité* complet, ces *Eléments* n'en sont pas un simple extrait, comme on pourrait être tenté de le croire; la nécessité de modifier la disposition générale de l'ouvrage a entraîné de nombreux changements dans sa rédaction.

Notre nouveau livre correspond fidèlement aux Programmes officiels, et renferme toutes les parties de la Géométrie enseignées dans les établissements d'instruction publique. Le texte des *Éléments* proprement dits développe les Programmes successifs des classes de troisième, de seconde, de rhétorique et de philosophie. Le *Complément* qui termine l'ouvrage contient, résolues paragraphe par paragraphe, toutes les questions

additionnelles du Programme de Mathématiques élémentaires et toutes celles réservées au Cours de Mathématiques spé ciales.

Cette disposition facilite le travail de l'Élève, qui trouvera ainsi toutes les questions, exposées dans l'ordre même suivi par le Professeur, et approfondies dans la mesure fixée par les Programmes officiels.

Des Exercices sont indiqués à la fin de chaque paragraphe; des Questions plus difficiles, à la fin de chaque Livre.

Nous donnons à la suite de l'ouvrage une Note sur le lever des plans et l'arpentage, sur la mesure d'une aire plane limitée par une ligne courbe, et sur celle d'un volume limité par une surface courbe. Nous avons cru satisfaire aux conditions des nouveaux Programmes, en faisant surtout connaître l'esprit des méthodes employées, sans entrer dans des détails trop minutieux qu'on ne peut apprendre que sur le terrain. Cette Note forme à nos yeux un petit Traité du lever des plans, et renferme tout ce qui est nécessaire pour que l'Élève puisse passer aux applications.

L'amélioration la plus importante que nous ayons à signaler est relative au cinquième Livre. Les idées émises à ce sujet dans le *Traité* ayant été généralement adoptées, nous les avons développées cette fois sans aucune restriction; les théorèmes acquièrent ainsi plus de généralité, et il devient plus facile de les démontrer et surtout de les appliquer.

Nous espérons que nos deux Ouvrages se prêteront un mu tuel secours; et que les Élèves studieux, bien préparés par ces *Éléments* à la lecture du *Traité*, pourront ainsi, sans changer de point de vue, pousser plus avant l'étude de la Géométrie.



TABLE DES MATIÈRES (*)

GÉOMÉTRIE PLANE.

LIVRE PREMIER.

LA LIGNE DROITE.

LIVRE II.

LA CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

(*) Cette Table est la reproduction des Programmes officiels.

LIVRE III.

LES FIGURES SEMBLABLES.

LIVRE IV.

LES AIRES.

(*) Ici s'arrête le Programme de la classe de troisième.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

LIVRE V.

LE PLAN.

LIVRE VI.

LES POLYÈDRES.

LIVRE VII.

LES CORPS RONDS.

(*) Ici s'arrête le Programme de la classe de seconde.

COMPLÉMENT.

(*) Ici s'arrête le Programme de la classe de rhétorique.

NOTIONS SUR QUELQUES COURBES.

NOTES.

ÉLÉMENTS

DE GÉOMÉTRIE.

INTRODUCTION.

Programme officiel : *Ligne droite et plan. — Ligne brisée. — Ligne courbe.*

1. On appelle *volume* d'un corps l'étendue du lieu que ce corps occupe dans *l'espace* indéfini. Ce lieu, essentiellement limité, est séparé de l'espace qui l'entoure par la *surface* du corps.

Les diverses faces d'un corps sont autant de surfaces dont les limites ou les intersections mutuelles s'appellent *lignes*.

Enfin on donne le nom de *points* aux limites ou aux extrémités d'une ligne, aux intersections mutuelles des lignes.

Ces idées de *surface*, de *ligne* et de *point*, étant une fois acquises par la considération des corps, la surface, la ligne et le point peuvent ensuite être conçus indépendamment du corps, des surfaces et des lignes, dont ils constituent les limites. C'est ainsi qu'on arrive à regarder inversement une ligne comme le lieu des positions successives d'un point mobile, et une surface comme le lieu des positions successives d'une ligne qui se meut suivant une loi déterminée.

2. La plus simple de toutes les lignes est la *ligne droite*, dont la notion est familière à tout le monde, et dont un fil tendu offre l'image.

La ligne droite est le plus court chemin entre deux quelconques de ses points.

Deux points déterminent une droite. En d'autres termes,

par deux points on peut toujours faire passer une droite, et on n'en peut faire passer qu'une. D'où il suit que *deux droites qui ont deux points communs coïncident, non-seulement entre ces deux points, mais encore dans toute leur étendue ;* et, par conséquent, que *deux droites distinctes ne peuvent avoir qu'un point commun.*

Ces propriétés fondamentales de la ligne droite sont intuitives, et de longs commentaires ne pourraient qu'obscurcir le sentiment que chacun en possède.

3. En Géométrie, on indique un point par une lettre, une droite par deux lettres affectées à deux de ses points. Ainsi, l'on dit le point A, la droite AB (*fig.* 1).

Fig. 1.



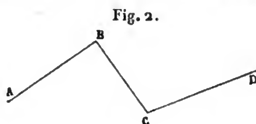
Deux portions AB et CD, prises respectivement sur deux droites *indéfinies*, ont la même *longueur* lorsqu'elles sont superposables. La droite CD étant transportée de manière que le point C tombe en A, si l'on peut amener le point D sur le point B en faisant tourner la droite CD autour du point A, la portion CD aura une longueur égale à celle de la portion AB.

Pour *ajouter* deux portions de droites AB et CD, on porte la portion CD à la suite de AB, sur la droite indéfinie dont AB fait partie : BE étant la nouvelle position de CD (*fig.* 1), on dit que AE a une longueur égale à la somme des longueurs de AB et de CD.

Si l'on avait une troisième droite à ajouter aux deux premières, on la porterait à la suite de BE, et ainsi de suite.

4. On nomme *ligne brisée* une ligne formée de plusieurs portions de droites distinctes ; telle est la ligne ABCD (*fig.* 2).

Fig. 2.



On confond sous la dénomination commune de *lignes courbes* toutes les lignes autres que la ligne droite ou les lignes brisées.

5. La plus simple de toutes les surfaces est le *plan*, dont une glace polie peut donner l'idée. La définition géométrique du plan consiste en ce que toute droite qui joint deux points de cette surface y est contenue tout entière. C'est ainsi, par exemple, que, pour vérifier si une table est plane, on s'assure qu'on peut y appliquer *dans tous les sens* une règle bien dressée, sans qu'il reste aucun vide entre la table et la règle.

Une surface formée de plusieurs portions de plans distinctes est dite *brisée;* et l'on confond sous la dénomination commune de *surfaces courbes* toutes les surfaces autres que le plan et les surfaces brisées.

6. On désigne sous le nom générique de *figures* les surfaces et les lignes ou l'ensemble de plusieurs de ces éléments.

La Géométrie a pour objet l'étude des propriétés des figures et, en particulier, la mesure de leur étendue. Elle ramène la mesure d'un volume ou d'une portion de surface à la mesure directe de certaines lignes droites convenablement choisies dans chaque cas.

On divise la Géométrie en deux parties : la *Géométrie plane*, relative aux figures situées dans un plan unique, et la *Géométrie dans l'espace*, relative aux figures dont les éléments peuvent être disposés d'une manière quelconque dans l'espace.

7. Nous terminerons cette introduction en définissant quelques mots qui sont d'un usage fréquent en Mathématiques.

Toute proposition consiste dans une *hypothèse* et une *conclusion* qui en découle, soit immédiatement, soit en vertu d'un raisonnement qu'on appelle *démonstration*.

Un *axiome* est une proposition évidente par elle-même. Un *théorème* est une proposition à démontrer. Un *lemme* est une proposition préliminaire destinée à faciliter la démonstration d'un théorème. Un *corollaire* est une conséquence d'un théorème. Un *scolie* est une remarque sur une ou plusieurs propositions. Un *problème* est une question à résoudre.

GÉOMÉTRIE PLANE.

LIVRE PREMIER.

LA LIGNE DROITE.

§ I.

Programme officiel : *Angle. — Génération des angles par la rotation d'une droite autour d'un de ses points. — Angle droit.*

DÉFINITIONS.

8. On exprime une idée claire pour tous les esprits, lorsqu'on dit que deux droites AB et AC qui se rencontrent forment un *angle;* c'est là une notion fondamentale qui, comme celle de la ligne droite, ne saurait être *définie,* c'est-à-dire ramenée à une autre plus simple.

Fig. 3.

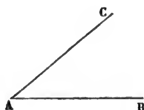
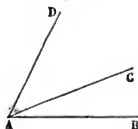


Fig. 4.



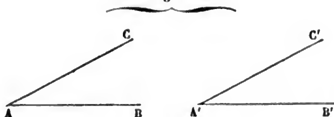
Les deux droites AB et AC sont les *côtés* de l'angle, et leur point d'intersection A est son *sommet.* On désigne un angle isolé par la lettre du sommet. Lorsque plusieurs angles ont même sommet, on indique celui des angles qu'on considère au moyen de trois lettres, savoir : deux lettres placées sur les côtés, et la lettre du sommet qu'on énonce au milieu. Ainsi, dans la *fig.* 3, on dit simplement l'angle A; dans la *fig.* 4, on distingue les trois angles BAC, CAD, BAD.

Deux angles, tels que BAC et CAD, qui ont le même sommet A, un côté commun AC, et les deux autres côtés AB et AD

situés de part et d'autre du côté commun, sont appelés *adjacents.*

9. On dit que deux angles sont *égaux*, lorsqu'on peut les porter l'un sur l'autre de manière qu'ils coïncident. Ainsi, lorsqu'on aura placé le côté A′B′ sur AB de façon que le sommet A′ soit en A et que le côté A′C′ tombe comme AC au-

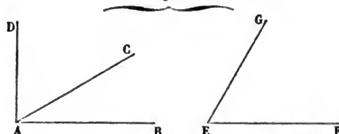
Fig. 5.



dessus de AB (*fig.* 5), il faudra, pour que les angles A et A′ soient égaux, que le côté A′C′ s'applique sur AC.

Pour ajouter deux angles BAC, FEG, on transporte le second à la suite du premier (*fig.* 6), de manière à former les deux

Fig. 6.



angles adjacents BAC, CAD; l'angle BAD des deux côtés non communs AB et AD est la *somme* des deux angles proposés.

10. On acquiert une idée très-nette de l'angle sous le rapport de la grandeur, en supposant que l'un des côtés AC, d'abord appliqué sur le premier AB, tourne autour du point A comme une branche de compas autour de sa charnière. Dans cette rotation, le côté mobile AC fait avec le côté fixe AB un angle qui croît par degrés insensibles, ou d'une *manière continue.* Il résulte de ce mode de génération, ainsi que des définitions du numéro précédent, que la grandeur d'un angle est indépendante de la longueur de ses côtés.

11. On dit qu'une droite AO est *perpendiculaire* sur une droite BC (*fig.* 7), lorsque les deux angles adjacents AOB, AOC, qu'elle forme avec celle-ci, sont *égaux*. Si la droite AO est

telle (*fig.* 8), que les angles adjacents AOB, AOC, soient *inégaux*, on dit que cette droite est *oblique* sur BC. Le point O

Fig. 7.

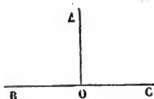


Fig. 8.

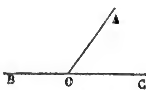
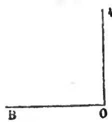


Fig. 9.



est le *pied* de la perpendiculaire ou de l'oblique AO sur la droite BC.

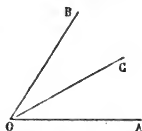
On appelle *angle droit* tout angle AOB (*fig.* 9) dont un côté est perpendiculaire sur l'autre.

12. Deux angles sont dits *opposés par le sommet* lorsque les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre. D'après cela, deux droites indéfinies BB′ et CC′ (*fig.* 10) forment, en se coupant au point A, quatre angles BAC et B′AC′, CAB′ et BAC′, qui sont deux à deux opposés par le sommet.

Fig. 10.



Fig. 11.



13. On nomme *bissectrice* d'un angle AOB (*fig.* 11) la droite OC qui, menée par le sommet, divise cet angle en deux autres, AOC et BOC, égaux entre eux.

THÉORÈME.

14. *Par un point* A, *pris sur une droite* DC, *on peut toujours élever une perpendiculaire* AB *sur cette droite, et on ne peut en élever qu'une* (*fig.* 12).

En effet, supposons qu'une droite AE, d'abord appliquée sur AC, tourne autour du point A dans le sens de la flèche. L'angle EAC, nul au début, croîtra constamment, tandis que l'angle adjacent EAD diminuera sans cesse et finira par s'annuler, lorsque la droite AE viendra s'appliquer sur AD. Donc, l'angle EAC, d'abord inférieur à l'angle EAD, différera de moins en moins de cet angle, lui deviendra égal, puis le surpassera

de plus en plus. D'après cela, parmi les positions successives de la droite AE, il y en aura une, et une seule AB, pour laquelle les angles adjacents BAC et BAD seront égaux, c'est-à-dire pour laquelle cette droite sera perpendiculaire sur DC.

Fig. 12.

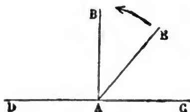
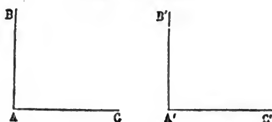


Fig. 13.



COROLLAIRE.

15. *Tous les angles droits sont égaux.*

Soient (*fig.* 13) les deux angles BAC, B'A'C', qui ont été formés, le premier en élevant la perpendiculaire AB sur AC, le second en élevant la perpendiculaire A'B' sur A'C'; ces deux angles sont droits, et il faut démontrer qu'ils sont égaux. Transportons à cet effet la deuxième figure sur la première, de façon que le point A' tombe en A et que le côté A'C' s'applique sur AC; le côté A'B' deviendra alors perpendiculaire sur AC au point A : il s'appliquera donc sur AB, puisque par le point A on ne peut élever sur AC qu'une seule perpendiculaire. Donc les deux angles BAC, B'A'C', coïncideront, c'est-à-dire (9) seront égaux.

SCOLIE.

16. L'angle droit est donc un type invariable auquel on peut rapporter les autres angles.

On dit qu'un angle est *aigu* ou *obtus* suivant qu'il est *plus petit* ou *plus grand* que l'angle droit. Ainsi, dans la *fig.* 12, l'angle EAC est aigu et l'angle EAD est obtus.

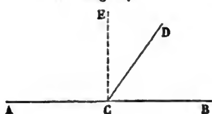
Deux angles sont dits *complémentaires* lorsque leur somme est égale à un angle droit. Ainsi, dans la *fig.* 12, chacun des angles BAE, EAC, est le *complément* de l'autre. Deux angles qui ont des compléments égaux sont égaux.

THÉORÈME.

17. *Toute ligne droite* CD *qui en rencontre une autre* AB

fait avec celle-ci deux angles adjacents ACD, BCD, *dont la somme est égale à deux angles droits* (*fig.* 14).

Fig. 14.



En effet, si CD est perpendiculaire sur AB, le théorème est évident, puisque les angles adjacents ACD, BCD, sont droits tous les deux.

Si CD est oblique sur AB, les deux angles ACD, BCD, sont inégaux; soit ACD le plus grand. La perpendiculaire CE, élevée au point C sur AB, tombera dans l'intérieur de cet angle et le décomposera en deux autres ACE et ECD. On aura donc

$$ACD + BCD = ACE + ECD + BCD.$$

Or l'angle ACE est droit, et la somme ECD + BCD est égale à l'angle droit BCE. Donc enfin

$$ACD + BCD = 2 \text{ angles droits.}$$

18. On dit que deux angles sont *supplémentaires* lorsque leur somme est égale à deux angles droits. D'après cela, dans la *fig.* 14, chacun des angles adjacents ACD, BCD, est le *supplément* de l'autre. Deux angles qui ont des suppléments égaux sont égaux. Pour avoir le supplément BCD d'un angle ACD, il suffit de prolonger l'un des côtés AC au delà du sommet.

19. On nomme *réciproque* d'une proposition une seconde proposition dont l'hypothèse et la conclusion sont respectivement la conclusion et l'hypothèse de la première. Prenons pour exemple le théorème précédent. On peut l'énoncer de la manière suivante : *Si deux angles adjacents* ACD, BCD, *ont leurs côtés extérieurs* AC *et* BC *en ligne droite, ces angles sont supplémentaires.* La réciproque sera : *Si deux angles adjacents* ACD, BCD, *sont supplémentaires, leurs côtés extérieurs* AC *et* BC *sont en ligne droite.*

Pour démontrer cette proposition, il suffit de remarquer que le prolongement de AC doit former avec CD (18) un angle

égal au supplément de ACD, c'est-à-dire, à cause de l'hypothèse, un angle égal à BCD; le prolongement de AC ne diffère donc pas de BC.

On énonce *la proposition contraire* d'une proposition donnée, en adoptant à la fois une hypothèse et une conclusion opposées à celles de la proposition primitive. Prenons encore pour exemple le théorème précédent. Sa proposition contraire sera : *Si deux angles adjacents n'ont pas leurs côtés extérieurs en ligne droite, ces deux angles ne sont pas supplémentaires.* En effet, s'ils l'étaient, leurs côtés extérieurs devraient être situés en ligne droite, en vertu de la proposition réciproque.

On voit que la proposition directe et sa réciproque étant vraies, leurs propositions contraires le sont nécessairement; de même, l'existence d'une proposition directe et de sa contraire entraîne celle de leurs propositions réciproques.

Corollaires.

20. *La somme de tous les angles consécutifs* ABD, DBE, EBF, FBC, *que l'on peut former autour du point* B *d'une droite* AC, *d'un même côté de cette droite, est égale à deux*

Fig. 15.

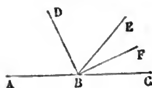
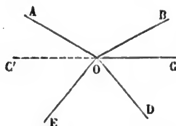


Fig. 16.



angles droits (*fig.* 15); car leur somme est évidemment la même que celle des deux angles adjacents ABF, FBC.

21. *La somme de tous les angles consécutifs* AOB, BOC, COD, DOE, EOA, *que l'on peut former autour d'un même point* O, *est égale à quatre angles droits* (*fig.* 16); car en prolongeant OC, par exemple, suivant OC', on voit que cette somme équivaut à celle des angles C'OA, AOB, BOC, situés d'un côté de CC', plus celle des angles COD, DOE, EOC', situés de l'autre côté ; et l'on vient de prouver que chacune de ces deux sommes partielles est égale à deux angles droits.

THÉORÈME.

22. *Lorsque deux lignes droites* AB, DE, *se coupent, les angles opposés par le sommet sont égaux* (*fig.* 17).

Fig. 17.

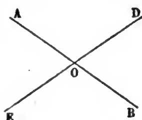
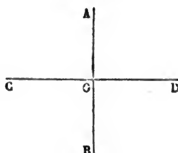


Fig. 18.



Soient, par exemple, les deux angles opposés AOE, DOB. Le premier AOE a pour supplément l'angle AOD formé par le côté AO et le prolongement OD du côté OE. Le second BOD a aussi pour supplément l'angle AOD, qui peut être considéré comme formé par le côté OD et le prolongement OA du côté BO. Les deux angles AOE, DOB, ayant même supplément AOD, sont égaux entre eux.

On démontrerait de la même manière l'égalité des angles AOD et BOE.

Corollaires.

23. *Lorsque l'un des quatre angles formés par la rencontre de deux droites indéfinies* AB *et* CD *est droit, les trois autres sont aussi droits* (*fig.* 18); car, de ce que l'angle AOC, par exemple, est droit, il résulte que son opposé DOB doit l'être, ainsi que chacun de ses suppléments AOD et COB.

On voit par là que :

Lorsqu'une droite AO *est perpendiculaire sur une autre droite* CD, *son prolongement* OB *est aussi perpendiculaire sur la même droite ;*

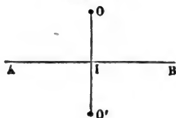
Si une droite AB *est perpendiculaire sur une autre* CD, *la seconde* CD *est à son tour perpendiculaire sur la première* AB.

THÉORÈME.

24. *Par un point* O *pris hors d'une droite* AB, *on peut tou-*

jours abaisser une perpendiculaire sur cette droite, et on ne peut en abaisser qu'une (*fig.* 19).

Fig. 19.



Désignons par O′ le point sur lequel vient s'appliquer le point O, lorsqu'on plie la figure autour de la droite AB, de manière à en rabattre la partie supérieure sur la partie inférieure. Joignons aux points O et O′ un point quelconque I de la droite AB. Les angles adjacents OIB, O′IB, seront égaux; car, si l'on pliait de nouveau la figure autour de AB, O venant sur O′ et I restant fixe, le premier angle recouvrirait exactement le second. D'après cela, pour que la droite OI soit perpendiculaire sur AB, c'est-à-dire pour que l'angle OIB soit droit, il faut et il suffit que la somme des deux angles adjacents égaux OIB, O′IB, soit égale à deux angles droits; et, par suite, que leurs côtés extérieurs IO, IO′, soient en ligne droite. Donc enfin, comme entre O et O′ il existe toujours une droite, et une seule, on voit que du point O on peut toujours mener une perpendiculaire sur AB, mais une seule.

EXERCICES.

1. Les bissectrices de deux angles adjacents et supplémentaires sont perpendiculaires l'une à l'autre.

2. Les bissectrices des quatre angles formés par deux droites indéfinies forment deux droites à angle droit l'une sur l'autre.

3. Étant données quatre droites OA, OB, OC, OD, issues d'un même point O, si les angles DOA, BOC, sont égaux entre eux, ainsi que les angles AOB, COD, les côtés OA et OC sont en ligne droite, ainsi que les côtés OB et OD.

4. ACB étant un angle, CO sa bissectrice et CM une droite menée à volonté par le sommet C dans l'intérieur de cet angle, l'angle MCO est égal à la demi-différence des angles MCA, MCB. Si la droite CM est extérieure à l'angle ACB, l'angle MCO est la demi-somme des angles MCA, MCB.

§ II.

PROGRAMME OFFICIEL : *Triangles. — Cas d'égalité les plus simples. — Propriétés du triangle isocèle.*

DÉFINITIONS.

25. On appelle *triangle* la portion de plan renfermée entre trois droites qui se coupent deux à deux. La partie de chaque droite comprise entre les points où elle rencontre les deux autres est un *côté* du triangle. Ainsi la figure ABC (*fig.* 20) est un triangle dont les côtés sont AB, BC, CA. Chacun des angles formés par deux côtés consécutifs est un *angle* du triangle ;

Fig. 20.

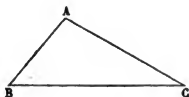


Fig. 21.

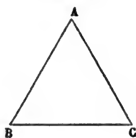
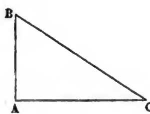


Fig. 22.



les sommets A, B, C, de ces trois angles sont appelés les *sommets* du triangle.

On dit que deux triangles sont égaux, lorsqu'on peut les appliquer l'un sur l'autre de manière qu'ils coïncident.

26. Un triangle est *isocèle*, quand il a deux côtés égaux : tel est le triangle ABC (*fig.* 21), dans lequel AB est égal à AC. Le troisième côté BC prend spécialement le nom de *base* du triangle isocèle, et le sommet opposé A le nom de *sommet* du triangle isocèle.

Un triangle est *équilatéral*, lorsqu'il a ses trois côtés égaux entre eux.

Enfin un triangle est dit *rectangle*, lorsqu'il a un angle droit. Le côté BC (*fig.* 22) opposé à l'angle droit A reçoit le nom d'*hypoténuse*.

27. *Dans tout triangle* ABC, *un côté quelconque* BC *est moindre que la somme des deux autres* AB *et* AC (*fig.* 20).

Car la ligne droite BC, étant le plus court chemin entre les points B et C, est moindre que la ligne brisée BA + AC.

28. *Dans tout triangle* ABC, *un côté quelconque* BC *est plus grand que la différence des deux autres* AC *et* AB. En effet, soit AC le plus grand des deux côtés AC et AB, on aura, d'après le numéro précédent,

$$BC + AB > AC;$$

d'où, en retranchant AB de part et d'autre,

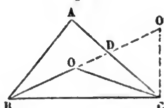
$$BC > AC - AB.$$

29. *Trois droites de longueurs arbitraires ne peuvent pas toujours former les trois côtés d'un triangle.* Il faut que chacune d'elles soit moindre que la somme des deux autres, ou, plus brièvement, que la plus grande d'entre elles soit inférieure à la somme des deux autres. Par exemple, il n'existe pas de triangle dont les côtés aient des longueurs respectivement égales à 7 mètres, 5 mètres, 1 mètre.

THÉORÈME.

30. *Si deux triangles* OBC, ABC, *qui ont un côté commun* BC, *sont compris l'un dans l'autre, la somme des deux côtés* OB *et* OC *du triangle enveloppé est moindre que la somme des deux côtés* AB *et* AC *du triangle enveloppant* (*fig.* 23).

Fig. 23.



En effet, prolongeons BO jusqu'au point D où cette droite rencontre le côté AC. En remplaçant la ligne droite OC par la ligne brisée OD + DC, on change la somme OB + OC en une autre plus grande

$$OB + OD + DC \quad \text{ou} \quad BD + DC.$$

De même, en remplaçant la ligne droite BD par la ligne brisée AB + AD, on change la somme BD + DC en une autre

$$AB + AD + DC \quad \text{ou} \quad AB + AC,$$

qui est plus grande encore. On a donc

$$OB + OC < AB + AC.$$

SCOLIE.

31. *Lorsque deux triangles* O'BC, ABC, *qui ont un côté commun* BC, *s'entrecoupent, la somme des deux côtés* AB *et* O'C *qui ne se croisent pas est moindre que la somme des deux côtés* AC *et* O'B *qui se croisent* (*fig.* 23).

En effet, on a dans le triangle ABD

$$AB < AD + DB,$$

et dans le triangle O'CD,

$$O'C < DC + O'D.$$

En ajoutant ces deux inégalités membre à membre, on obtient

$$AB + O'C < AD + DC + O'D + DB$$

ou

$$AB + O'C < AC + O'B.$$

THÉORÈME.

32. *Si deux côtés d'un triangle sont égaux à deux côtés d'un autre triangle chacun à chacun, et si l'angle compris entre les premiers est plus grand que l'angle compris entre les seconds, le troisième côté du premier triangle est plus grand que le troisième côté du second* (*fig.* 24, 25, 26).

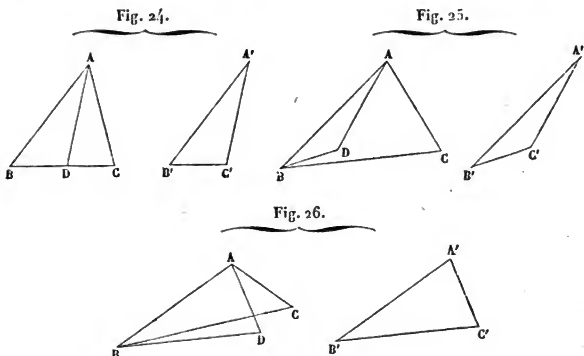
Soient les deux triangles ABC, A'B'C', dans lesquels on a $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, et l'angle BAC plus grand que l'angle A' : le côté BC sera plus grand que le côté B'C'.

En effet, plaçons le triangle A'B'C' en ABD, de manière que A'B' coïncide avec son égal AB, et que le côté A'C', qui fait avec A'B' un angle A' moindre que BAC, tombe suivant AD dans l'intérieur de l'angle BAC. La droite BD n'étant autre chose que le côté B'C' transporté, il suffit de démontrer que BC est plus grand que BD.

Or, il peut se présenter trois cas, suivant que le point D

tombe sur BC (*fig.* 24), ou à l'intérieur du triangle ABC (*fig.* 25), ou au dehors (*fig.* 26).

Dans le premier cas (*fig.* 24), le théorème est évident, puisque BD n'est qu'une partie de BC.



Dans le deuxième cas (*fig.* 25), on a (30)

$$AC + BC > AD + BD\,;$$

d'où, en supprimant d'une part AC et de l'autre son égal AD,

$$BC > BD.$$

Dans le troisième cas (*fig.* 26), on a (31)

$$AD + BC > AC + BD\,;$$

d'où, en supprimant d'une part AD et de l'autre son égal AC,

$$BC > BD.$$

THÉORÈME.

33. *Deux triangles sont égaux :*

1° *Lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun ;*

2° *Lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun ;*

3° *Lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.*

En effet :

1° Soient (*fig.* 27) les deux triangles ABC, A′B′C′, tels qu'on ait

$$BC = B'C', \quad B = B', \quad C = C'.$$

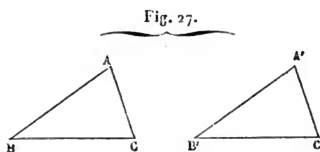
Transportons le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC, de manière que le côté B′C′ coïncide avec son égal BC, B′ étant en B et C′ en C. Puisque l'angle B′ est égal à l'angle B et que les deux triangles sont supposés tomber d'un même côté de BC, le côté B′A′ prendra la direction BA, et le point A′ tombera quelque part sur la droite indéfinie BA. De même, puisque l'angle C′ est égal à l'angle C, le côté C′A′ prendra la direction CA, et le point A′ tombera quelque part sur la droite indéfinie CA. Donc le point A′, devant se trouver à la fois sur les deux droites BA et CA, tombera nécessairement sur leur point d'intersection A. Par suite, les deux triangles coïncideront.

2° Soient (*fig.* 27) les deux triangles ABC, A′B′C′, tels qu'on ait

$$A = A', \quad AB = A'B', \quad AC = A'C'.$$

Transportons le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC, de manière que l'angle A coïncide avec son égal A′, le côté A′B′

Fig. 27.



tombant sur le côté AB et le côté A′C′ sur le côté AC. Ces côtés ayant alors même direction, même longueur et une extrémité commune, leurs autres extrémités se confondront, c'est-à-dire que le point B′ tombera sur le point B et le point C′ sur le point C. Par suite, les deux triangles coïncideront.

3° Soient (*fig.* 27) les deux triangles ABC, A′B′C′, tels qu'on ait

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad AC = A'C'.$$

L'angle A du premier triangle, compris entre les côtés AB et AC, doit être égal à l'angle A' du second triangle, compris entre les côtés A'B' et A'C', respectivement égaux aux côtés AB et AC; car, d'après le n° 32, si ces angles différaient, les côtés BC et B'C' seraient inégaux contrairement à l'hypothèse.

Dès lors, les deux triangles proposés sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.

SCOLIE.

34. Deux triangles égaux, ABC, A'B'C', satisfont à six conditions, savoir :

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad BC = B'C',$$
$$C = C', \quad B = B', \quad A = A'.$$

Chaque cas d'égalité renferme trois de ces conditions groupées de telle sorte que, lorsqu'elles sont satisfaites, les six soient remplies. Par suite, quand on aura reconnu dans une certaine figure l'égalité de deux triangles par l'application de l'un des trois cas énoncés, on devra en conclure immédiatement l'égalité des trois éléments non employés, et l'on aura acquis ainsi de nouvelles données qui permettront d'aller plus avant dans la recherche que l'on poursuit. Tel est l'usage de la théorie de l'égalité des triangles.

Il est essentiel de remarquer que, dans deux triangles égaux, les côtés égaux sont toujours opposés aux angles égaux.

THÉORÈME.

35. *Dans un triangle :*

1° *Si deux angles sont égaux, les côtés opposés sont égaux, et le triangle est isocèle ;*

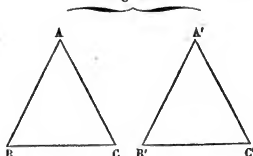
2° *Si deux angles sont inégaux, le côté opposé au plus grand de ces deux angles est plus grand que le côté opposé à l'autre angle.*

En effet :

1° Soit (*fig.* 28) ABC un triangle dont les angles B et C sont égaux entre eux. Considérons un second triangle A'B'C', reproduction exacte du premier, et transportons-le sur ABC, *en*

le renversant, de manière que B′ tombe en C et C′ en B. Le côté C′B′ coïncidera avec son égal BC. L'angle C′ étant égal à l'angle C et par suite à l'angle B, si l'on fait tomber les deux

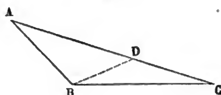
Fig. 28.



triangles d'un même côté par rapport à BC, le côté C′A′ prendra la direction BA, et le point A′ tombera quelque part sur la droite indéfinie BA. De même, l'angle B′ étant égal à l'angle B, et par suite à l'angle C, le côté B′A′ prendra la direction CA, et le point A′ tombera quelque part sur la droite indéfinie CA. Le point A′, devant se trouver à la fois sur les deux droites BA et CA, tombera donc sur leur intersection A, et les deux triangles ABC, A′B′C′, coïncideront. Puisque le côté A′B′, qui est égal à AB, vient recouvrir exactement le côté AC, on en conclut que AB et AC sont égaux.

2° Soit (*fig.* 29) le triangle ABC dans lequel l'angle ABC est

Fig. 29.



plus grand que l'angle C. On pourra mener dans l'angle ABC une droite BD qui fasse avec BC un angle DBC égal à l'angle C. Le triangle BDC ayant deux angles égaux DBC, DCB, sera isocèle, et l'on aura $BD = DC$. Or, dans le triangle ABD, on a

$$AB < AD + BD,$$

ou, en remplaçant BD par son égal DC,

$$AB < AD + DC,$$

c'est-à-dire

$$AB < AC.$$

36. Réciproquement, *si un triangle a deux côtés égaux, c'est-à-dire est isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux; et si un triangle a deux côtés inégaux, au plus grand côté est opposé le plus grand angle.*

En effet, soient a et b deux côtés d'un triangle, et A et B les deux angles opposés. Le théorème précédent prouve qu'aux trois hypothèses

$$A < B, \quad A = B, \quad A > B,$$

qui sont les seules possibles, répondent respectivement les conclusions distinctes

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

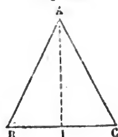
Donc, si a est égal à b, A est forcément égal à B, car si A était inférieur ou supérieur à B, a serait, d'après le théorème direct, inférieur ou supérieur à b; de même, si a est plus grand que b, il faut que A soit plus grand que B, et si a est plus petit que b, il faut que A soit plus petit que B.

Scolie.

37. La démonstration du nº 35 (1º) met en évidence cette propriété dont jouit tout triangle isocèle, d'être superposable à lui-même *par retournement*. Cette propriété caractéristique est la clef des autres propriétés du triangle isocèle.

Ainsi (*fig.* 30), dans ce retournement du triangle iso-

Fig. 30.



cèle BAC, B venant en C et C en B, le milieu I de BC retombe sur lui-même aussi bien que le sommet A. Par suite, l'angle AIC vient recouvrir son adjacent et supplémentaire AIB, et l'angle CAI son adjacent BAI. Donc, *dans tout triangle isocèle* BAC, *la droite qui joint le sommet* A *au milieu* I *de la base* BC *est perpendiculaire sur cette base et divise l'angle au*

sommet en deux parties égales. Cela résulterait aussi de l'égalité des triangles ABI, ACI, qui ont évidemment les trois côtés égaux chacun à chacun.

La droite AI satisfait donc aux quatre conditions suivantes : elle passe par le sommet A, par le milieu I de la base BC, elle est perpendiculaire sur cette base, elle est bissectrice de l'angle au sommet.

Or, deux de ces quatre conditions suffisent pour déterminer la droite AI; car on sait que par deux points on ne peut mener qu'une droite, qu'un angle n'admet qu'une bissectrice, et que par un point on ne peut mener qu'une perpendiculaire à une droite. Donc, toute ligne droite, assujettie à deux des quatre conditions indiquées, remplira nécessairement les deux autres.

38. *Un triangle équilatéral a ses trois angles égaux, et, réciproquement, tout triangle dont les trois angles sont égaux est équilatéral.*

39. Le mode de démonstration qui précède (36) est d'un usage très-fréquent en Géométrie, et il convient de l'ériger dès à présent en règle générale.

Lorsque, dans une proposition ou dans une série de propositions, on a fait toutes les hypothèses admissibles, et que ces hypothèses ont conduit à des conclusions respectives essentiellement distinctes, les réciproques des propositions établies sont toutes vraies.

Ainsi, en rapprochant les théorèmes démontrés aux n°s 32 et 33, on voit que *si deux triangles* ABC, A′B′C′, *ont deux côtés respectivement égaux chacun à chacun, savoir* AB = A′B′, *et* AC = A′C′, *le troisième côté* BC *du premier triangle est inférieur, égal ou supérieur au troisième côté* B′C′ *du second, suivant que l'angle opposé* A *du premier triangle est inférieur, égal ou supérieur à l'angle opposé* A′ *du second.* Donc réciproquement, *si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, l'angle que ces côtés comprennent dans le premier triangle est inférieur, égal ou supérieur à l'angle compris entre les deux côtés correspondants du second triangle, suivant que le troisième côté du premier triangle est inférieur, égal ou supérieur au troisième côté du second.*

EXERCICES.

1. Le périmètre d'un triangle est plus grand que la somme des droites qui joignent un point intérieur quelconque aux trois sommets, et moindre que le double de cette somme. Considérer le cas où le point qu'on joint aux trois sommets est extérieur au triangle.

2. Une médiane quelconque d'un triangle, c'est-à-dire la ligne qui joint un sommet au milieu du côté opposé, est moindre que la demi-somme des deux côtés issus du même sommet, et plus grande que la moitié de l'excès de cette somme sur le troisième côté.

3. Le périmètre d'un triangle est plus grand que la somme de ses trois médianes et moindre que le double de cette somme.

4. ABC étant un triangle quelconque, on prend sur AB, prolongé s'il le faut, une longueur AC′ égale à AC; on prend de même sur AC une longueur AB′ égale à AB, on tire B′C′ qui coupe BC en I : démontrer que la droite AI est la bissectrice de l'angle BAC.

5. I étant le milieu de la base BC d'un triangle isocèle ABC et M un point pris à volonté sur le côté AC, démontrer que la différence des longueurs IB et IM est moindre que celle des longueurs AB et AM.

6. Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun et une médiane égale (deux cas).

7. Dans toute figure formée par des triangles juxtaposés, l'excès du nombre des côtés sur le nombre des sommets est égal au nombre des triangles moins un.

8. On donne un triangle ADB dans lequel l'angle B est plus grand que l'angle A, et un point C situé par rapport à AB du même côté que le triangle, et tel que

$$CA = CB = \frac{1}{2}(DA + DB);$$

E étant le point où CB coupe AD, prouver que l'on a $EC > ED$.

9. Déduire de la proposition précédente que, parmi tous les triangles de même base et de même périmètre, le plus grand est le triangle isocèle.

§ III.

Programme officiel : *Propriétés de la perpendiculaire et des obliques menées d'un même point à une droite. — Cas d'égalité des triangles rectangles.*

THÉORÈME.

40. *Si d'un point* O *pris hors d'une droite* AB, *on mène à cette droite la perpendiculaire* OI *et plusieurs obliques* OC, OD, OE,... :

1° *Deux obliques* OC *et* OE, *dont les pieds* C *et* E *sont également distants du pied* I *de la perpendiculaire, sont égales;*

2° *La perpendiculaire* OI *est plus courte que toute oblique* OC, *et de deux obliques* OC *et* OD *ou* OE *et* OD, *celle dont le pied s'écarte le plus du pied* I *de la perpendiculaire est la plus longue.*

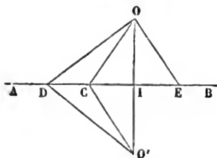
En effet :

1° Les deux triangles OIC, OIE, sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, savoir : l'angle droit OIC égal à l'angle droit OIE, le côté OI commun, et le côté IC égal à IE par hypothèse; donc

$$OC = OE,$$

2° Prolongeons (*fig.* 31) la perpendiculaire OI d'une quantité $IO' = OI$, et menons les droites O'C, O'D.

Fig. 31.



Les droites OC et O'C sont égales (1°) comme obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire CI menée de C sur OO'; on a de même $OD = O'D$. Or, le triangle ODO' donne (27,30)

$$OO' < OC + O'C < OD + O'D,$$

d'où, en prenant les moitiés,

$$OI < OC < OD.$$

Si l'on considérait deux obliques OD et OE situées de côtés différents par rapport à la perpendiculaire OI, on commencerait par prendre sur IA une longueur IC égale à IE; les obliques OC et OE seraient alors égales comme s'écartant également du pied de la perpendiculaire (1°). Or, si IE est moindre que ID, IC le sera aussi; et d'après l'alinéa précédent, l'oblique OC sera moindre que l'oblique OD. On aura donc encore

$$OE < OD.$$

Corollaires.

41. *La perpendiculaire* OI *abaissée d'un point* O *sur une droite* AB *est la ligne la plus courte que l'on puisse mener de ce point à la droite :* sa longueur est ce qu'on appelle la *distance* du point O à la droite AB.

42. La perpendiculaire OI étant plus courte que toute oblique OC, il suit du n° 35 que l'angle OCI est moindre que l'angle droit OIC. Donc : *lorsque deux droites* AB *et* OC *se coupent, la perpendiculaire* OI, *abaissée d'un point de l'une sur l'autre, est située dans l'intérieur de l'angle aigu* OCB *formé par ces deux droites.*

On peut encore conclure de là que, dans tout triangle rectangle, les deux angles autres que l'angle droit sont aigus.

Scolies.

43. L'exactitude des réciproques des propositions qui précèdent résulte immédiatement du principe général énoncé au n° 39.

1° *Si une droite est la plus courte distance d'un point à une autre droite, ces deux droites sont perpendiculaires entre elles.*

2° *Si deux obliques à une même droite partent d'un même point et sont égales entre elles, elles s'écartent également du pied de la perpendiculaire abaissée du point sur la droite.*

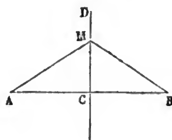
3° *Si deux obliques à une même droite partent d'un même point et sont inégales, la plus grande s'éloigne le plus du pied de la perpendiculaire abaissée du point sur la droite.*

44. D'un même point, on ne peut mener à une droite que *deux* obliques égales, et ces obliques sont situées de part et d'autre de la perpendiculaire abaissée du point sur la droite.

THÉORÈME.

45. *Tout point* M *de la perpendiculaire* CD *élevée sur le milieu d'une droite* AB *est également distant des extrémités* A *et* B *de cette droite* (*fig.* 32).

Fig. 32.



En effet, C étant le milieu de AB, on a CA = CB; donc MA et MB sont des obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire CD. On a donc (40) MA = MB.

46. Réciproquement, *tout point* M *équidistant des extrémités* A *et* B *d'une droite* AB *appartient à la perpendiculaire* CD *menée à cette droite par son milieu* C.

En effet, le triangle MAB étant isocèle par hypothèse, la droite MC, qui joint le sommet au milieu C de la base, est perpendiculaire sur cette base (37).

Corollaires.

47. Il résulte de ce qui précède que tous les points de la perpendiculaire menée à une droite par son milieu sont équidistants des extrémités de cette droite, et que les points de cette perpendiculaire sont les seuls points du plan qui jouissent de cette propriété.

En Géométrie plane, on donne le nom de *lieu géométrique* à la figure formée par l'ensemble des points du plan qui jouissent d'une propriété commune. On peut donc exprimer la double proposition qui précède en disant :

La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite est le lieu géométrique *des points équidistants des extrémités de cette droite.*

48. Deux points suffisent pour déterminer une droite. Donc, dès qu'une droite a deux points équidistants des extrémités d'une seconde droite, on peut affirmer que la première droite est perpendiculaire sur le milieu de la seconde.

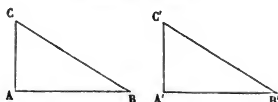
THÉORÈME.

49. *Deux triangles rectangles sont égaux :*

1° *Lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal ;*

2° *Lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal.*

Fig. 33.



En effet :

1° Soient (*fig.* 33) les deux triangles ABC, A'B'C', rectangles en A et en A', et dans lesquels on a

$$BC = B'C' \quad \text{et} \quad B = B'.$$

Portons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC, de manière que B'C' coïncide avec BC, B' étant en B et C' en C. Si l'on fait tomber les deux triangles du même côté de BC, l'angle B' étant égal à l'angle B, le côté B'A' prendra la direction BA ; dès lors, le côté C'A', qui est perpendiculaire sur B'A', devra prendre la direction de CA, qui est la seule perpendiculaire qu'on puisse abaisser du point C sur BA. Le point A' devant tomber à la fois sur BA et sur CA viendra donc en A, et les deux triangles coïncideront.

2° Soient (*fig.* 33) les deux triangles ABC, A'B'C', rectangles en A et en A', et dans lesquels on a

$$BC = B'C' \quad \text{et} \quad AC = A'C'.$$

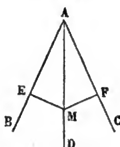
Portons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC, de manière que A'C' coïncide avec AC, A' étant en A et C' en C. Si l'on fait tomber les deux triangles du même côté de AC, le côté A'B' prendra la direction de AB, à cause de l'égalité des angles droits A et A'. De plus, C'B' deviendra une oblique égale à CB,

issue du même point C, et située du même côté de la perpendiculaire CA. Donc CB et C′B′ s'écarteront également du pied de cette perpendiculaire (43); en d'autres termes, le point B′ tombera en B, et les deux triangles coïncideront.

THÉORÈME.

50. *Tout point* M *pris sur la bissectrice* AD *d'un angle* BAC *est également distant des deux côtés de cet angle* (*fig.* 34).

Fig. 34.



La distance du point M au côté AB est la longueur de la perpendiculaire ME abaissée du point M sur AB (41); de même, la perpendiculaire MF, abaissée du point M sur AC, mesure la distance du point M au côté AC. Il s'agit de démontrer l'égalité de ME et de MF. Or, cette égalité résulte de celle des deux triangles MAE, MAF, qui, rectangles en E et en F, ont l'hypoténuse AM commune et un angle aigu égal, savoir MAE = MAF puisque la droite AD est la bissectrice de l'angle BAC.

51. Réciproquement, *tout point* M *pris à l'intérieur d'un angle* BAC, *à égale distance* ME = MF *de ses deux côtés* AB *et* AC, *appartient à la bissectrice de cet angle* (*fig.* 34).

En effet, en menant la droite MA, on obtient deux triangles rectangles, MAE, MAF, qui sont égaux comme ayant l'hypoténuse MA commune et un côté de l'angle droit égal : ME = MF. Donc, l'angle MAE opposé au côté ME est égal à l'angle MAF opposé au côté MF, et la droite AM est la bissectrice de l'angle BAC.

Corollaire.

52. *La bissectrice d'un angle est le lieu géométrique des points qui, situés dans l'intérieur de cet angle, sont équidistants de ses côtés.*

SCOLIE.

53. Pour établir un lieu géométrique, il faut toujours prouver une double proposition composée, soit d'une certaine proposition directe et de sa réciproque, soit de cette même proposition directe et de la proposition contraire.

Ainsi l'on démontrera : que tout point d'une certaine figure jouit d'une certaine propriété (proposition directe), et que tout point jouissant de cette propriété appartient à cette figure (proposition réciproque);

Ou bien : que tout point d'une certaine figure jouit d'une certaine propriété (proposition directe), et que tout point pris hors de cette figure ne jouit pas de cette propriété (proposition contraire).

L'équivalence de ces deux modes de démonstration résulte de ce que la proposition directe, sa réciproque et la proposition contraire sont tellement liées, que l'une quelconque des deux dernières est une conséquence des deux autres (19).

Il est ordinairement plus simple d'adopter le premier mode, c'est-à-dire de démontrer la proposition directe et sa réciproque; cela tient à ce que la proposition contraire exige toujours une figure différente de celle qui est relative à la proposition directe, tandis que la réciproque n'exige pas en général une figure nouvelle.

EXERCICES.

1. Trouver le lieu géométrique des points également distants de deux droites indéfinies qui se coupent.

2. Les distances des extrémités de la base d'un triangle isocèle aux côtés opposés sont égales entre elles.

3. On dit que deux points A et A' sont *symétriques* par rapport à une droite indéfinie XY, lorsque cette droite XY est perpendiculaire sur le milieu de AA'. Démontrer, d'après cette définition : 1° que si A' et B' sont les symétriques par rapport à XY de deux points quelconques A et B, les deux droites symétriques AB et A'B' sont égales entre elles; 2° que l'angle CAB de deux droites AB et AC est égal à l'angle C'A'B' de leurs symétriques A'B' et A'C'.

4. Par le sommet A d'un triangle ABC, on mène la droite indéfinie XY perpendiculaire sur la bissectrice de l'angle A. Démontrer que, si M est un point quelconque de XY, le périmètre du triangle BMC est plus grand que celui du triangle primitif ABC.

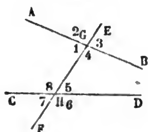
§ IV.

Programme officiel : *Droites parallèles.*

DÉFINITIONS.

54. Lorsqu'une sécante EF rencontre deux droites quelconques AB et CD, elle forme avec ces deux droites huit angles, dont quatre autour du point G et quatre autour du point H (*fig.* 35).

Fig. 35.



Les quatre angles 1, 4, 5, 8, compris entre les deux droites AB et CD, sont appelés angles *internes*. Les quatre autres 2, 3, 6, 7, sont appelés angles *externes*.

Deux angles qui sont internes, non adjacents et situés de part et d'autre de la sécante, sont dits *alternes-internes :* tels sont les angles 1 et 5, 4 et 8.

Deux angles qui sont externes, non adjacents et situés de part et d'autre de la sécante, sont dits *alternes-externes :* tels sont les angles 2 et 6, 3 et 7.

Deux angles situés d'un même côté de la sécante, l'un interne, l'autre externe, et non adjacents, sont dits *correspondants :* tels sont les angles 1 et 7, 4 et 6, 2 et 8, 3 et 5.

Enfin, les angles 1 et 8, 4 et 5, sont dits *intérieurs d'un même côté;* et les angles 2 et 7, 3 et 6, *extérieurs d'un même côté.*

55. Deux droites sont dites *parallèles* lorsque, étant situées dans un même plan, elles ne peuvent se rencontrer, si loin qu'on les prolonge.

THÉORÈME.

56. *Deux droites* AC *et* BD *perpendiculaires sur une troisième droite* EF *sont parallèles* (*fig.* 36).

Car, si elles se rencontraient, on pourrait de leur point d'intersection abaisser deux perpendiculaires sur EF (24).

COROLLAIRE.

57. *Par un point* A, *situé hors d'une ligne droite* BC, *on peut mener une parallèle à cette droite* (*fig.* 37).

Fig. 36.

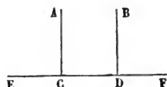
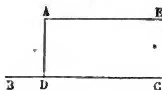


Fig. 37.



Abaissons du point A la perpendiculaire AD sur BC, et menons à AD la perpendiculaire AE. Les deux droites AE et BC, étant toutes deux perpendiculaires sur AD, sont parallèles.

SCOLIE.

58. ON ADMET que, *par un point pris hors d'une ligne droite, on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite.* De là résultent les deux propositions suivantes :

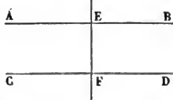
59. *Si une droite* A *en rencontre une autre* B, *elle rencontre toute parallèle* C *à cette autre ;* car si A était parallèle à C, du point de rencontre des droites A et B, on pourrait mener deux parallèles à C.

60. *Deux droites* A *et* B, *parallèles à une troisième* C, *sont parallèles entre elles ;* car, si A et B se rencontraient, de leur point de concours on pourrait mener deux parallèles à C.

THÉORÈME.

61. *Lorsque deux droites* AB *et* CD *sont parallèles, toute droite* EF, *perpendiculaire sur l'une* AB, *est perpendiculaire sur l'autre* CD (*fig.* 38).

Fig. 38.



D'abord, la droite EF rencontre CD (59). Concevons par leur point d'intersection F la perpendiculaire à EF. Cette perpen-

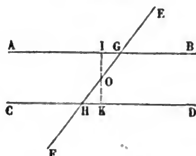
diculaire, devant être parallèle à AB (56), coïncidera avec CD, puisque par le point F on ne peut mener qu'une parallèle à AB. Donc, CD est perpendiculaire sur EF et, inversement, EF est perpendiculaire sur CD.

On énonce souvent ce théorème d'une manière plus rapide, en disant : *Deux parallèles ont leurs perpendiculaires communes.*

THÉORÈME.

62. *Lorsque deux droites parallèles* AB, CD, *sont rencontrées par une sécante* EF, *les quatre angles aigus formés autour des points d'intersection* G *et* H *sont égaux entre eux, ainsi que les quatre angles obtus formés autour des mêmes points* (*fig.* 39).

Fig. 39.



En effet, par le point O, milieu de GH, menons sur les parallèles AB et CD la perpendiculaire commune IK; OI tombera dans l'angle aigu OGA et OK dans l'angle aigu OHD (42). Or, les triangles rectangles OGI, OHK, ont leurs hypoténuses OG et OH égales, puisque le point O est le milieu de GH, et les angles aigus IOG, HOK, égaux comme opposés par le sommet : ils sont donc égaux (49) et, par suite, l'angle OGI est égal à l'angle OHK. Chacun de ces deux angles étant d'ailleurs égal à son opposé par son sommet, on voit que les quatre angles aigus OGI, EGB, OHK, CHF, sont égaux entre eux.

De même, les quatre angles obtus AGE, OGB, DHF, OHC, sont aussi égaux entre eux, comme suppléments des angles aigus.

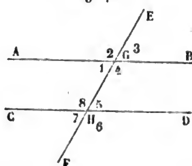
63. Réciproquement, *deux droites* AB *et* CD *étant coupées par une sécante* EF, *si les quatre angles aigus ou les quatre angles obtus formés autour des points d'intersection* G *et* H *sont gaux entre eux, les deux droites* AB *et* CD *sont parallèles.*

Supposons (*fig.* 40) que l'angle HGA soit égal à l'angle GHD, et concevons par le point H la parallèle à AB. Cette parallèle doit, d'après la proposition directe, faire avec GH un angle égal à l'angle HGA, et, par suite, à l'angle GHD ; donc cette parallèle coïncide avec HD, et la droite CD est parallèle à AB.

Corollaires.

64. *Deux parallèles* AB *et* CD (*fig.* 40) *étant coupées par*

Fig. 40.



une sécante EF, il résulte de ce qui précède :

1° Que *les angles alternes-internes* 1 et 5, ou 4 et 8, *sont égaux entre eux ;*

2° Que *les angles alternes-externes* 3 et 7, ou 2 et 6, *sont égaux entre eux ;*

3° Que *les angles correspondants* 1 et 7, ou 2 et 8, ou 3 et 5, ou 4 et 6, *sont égaux entre eux ;*

4° Que *les angles intérieurs d'un même côté* 1 et 8, ou 4 et 5, *sont supplémentaires ;*

5° Que *les angles extérieurs d'un même côté* 2 et 7, ou 3 et 6, *sont supplémentaires.*

Et, réciproquement, *deux droites coupées par une sécante sont parallèles :*

Si les angles alternes-internes sont égaux,

Ou *si les angles alternes-externes sont égaux,*

Ou *si les angles correspondants sont égaux,*

Ou *si les angles intérieurs d'un même côté sont supplémentaires,*

Ou *si les angles extérieurs d'un même côté sont supplémentaires.*

Scolie.

65. La proposition directe et la proposition réciproque étant

démontrées, les propositions contraires sont vraies par cela même (19). Ainsi :

Deux droites étant coupées par une sécante, si les angles formés ne satisfont pas aux relations que nous venons d'énoncer, les deux droites ne sont pas parallèles. En particulier :

Lorsque deux droites font avec une transversale deux angles intérieurs d'un même côté dont la somme diffère de deux angles droits, ces droites se rencontrent du côté de la sécante où cette somme est inférieure à deux angles droits.

66. Voici deux autres remarques souvent utiles :

1° *Deux droites* (*fig.* 41), *l'une* AB *perpendiculaire*, *et l'autre* CD *oblique sur une troisième droite* AC, *doivent se rencontrer;* car la somme des deux angles intérieurs BAC, DCA, est moindre que deux angles droits;

Fig. 41.

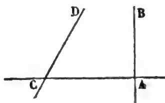
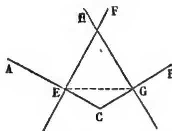


Fig. 42.



2° *Deux droites* EF, GH (*fig.* 42), *respectivement perpendiculaires à deux droites* CA *et* CB *qui se coupent, doivent se rencontrer;* car en menant la droite EG, on voit que chacun des angles intérieurs FEG, HGE, est moindre qu'un angle droit : la somme de ces angles est donc inférieure à deux angles droits.

THÉORÈME.

67. *Deux parallèles* AC, BD, *comprises entre deux autres parallèles* AB, CD, *sont égales* (*fig.* 43).

Fig. 43.

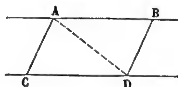


Fig. 44.



En effet, menons AD. Les deux triangles ABD, ACD, seront égaux comme ayant un côté commun AD adjacent à deux angles

égaux chacun à chacun, savoir : l'angle BAD égal à l'angle ADC comme alternes-internes par rapport aux parallèles AB, CD, coupées par la sécante AD ; et l'angle ADB égal à l'angle DAC comme alternes-internes par rapport aux parallèles AC, BD, coupées par la même sécante. Donc le côté BD opposé à l'angle BAD est égal au côté AC opposé à l'angle ADC.

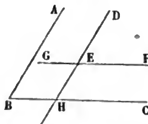
Corollaire.

68. Si les deux lignes AC et BD (*fig.* 44) étaient perpendiculaires sur AB et, par suite, sur CD (61), elles mesureraient les distances des points A et B de la droite AB à la droite CD. Ces deux distances étant égales comme parallèles comprises entre parallèles, et les deux points A et B étant pris d'une manière quelconque sur AB, on voit que *deux parallèles sont partout également distantes.*

THÉORÈME.

69. *Deux angles qui ont leurs côtés parallèles chacun à chacun sont égaux ou supplémentaires* (*fig.* 45).

Fig. 45.



1° Supposons que les côtés parallèles soient deux à deux dirigés dans le même sens. Soient, par exemple, les angles ABC, DEF ; BA et ED sont parallèles et dirigés l'un et l'autre de bas en haut ; BC et EF sont parallèles et dirigés l'un et l'autre de gauche à droite : les deux angles considérés sont égaux.

En effet, prolongeons le côté DE jusqu'au point H où il coupe le côté BC. Les angles ABC, DHC, sont égaux comme correspondants par rapport aux parallèles BA, HD, coupées par BC ; de même, les angles DEF, DHC, sont égaux comme correspondants par rapport aux parallèles EF, HC, coupées par DH. Donc, l'angle ABC est égal à l'angle DEF.

2° Supposons que les côtés parallèles soient dirigés deux à deux en sens contraires. Soient, par exemple, les angles ABC, GEH ; BA et EH sont parallèles et dirigés, le premier de bas

en haut, le deuxième de haut en bas; BC et EG sont parallèles et dirigés, l'un de gauche à droite, l'autre de droite à gauche : les deux angles considérés sont égaux.

En effet, en prolongeant les côtés de l'angle GEH au delà du sommet E, on forme un angle DEF égal d'une part à GEH comme opposé par le sommet, et d'autre part égal à ABC comme ayant ses côtés respectivement parallèles à ceux de ce dernier angle et dirigés dans le même sens.

3° Supposons enfin que deux côtés soient parallèles et de même sens, et les deux autres parallèles et de sens contraire. Soient, par exemple, les angles ABC, DEG; BA et ED sont parallèles et dirigés l'un et l'autre de bas en haut; BC et EG sont parallèles et dirigés, le premier de gauche à droite, le deuxième de droite à gauche : les deux angles considérés sont supplémentaires.

En effet, en prolongeant GE au delà du sommet E, on forme un angle DEF qui est d'une part le supplément de DEG, et qui est d'autre part égal à ABC comme ayant ses côtés respectivement parallèles à ceux de ce dernier angle et dirigés dans le même sens.

En résumé, *deux angles qui ont leurs côtés parallèles sont égaux si les côtés parallèles sont dirigés deux à deux dans le même sens, ou encore si les côtés parallèles sont dirigés deux à deux en sens contraires; ils sont supplémentaires, si deux côtés parallèles sont de même sens et les deux autres de sens contraire.*

COROLLAIRE.

70. *Deux angles qui ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun sont égaux ou supplémentaires* (*fig.* 46 *et* 47).

1° Considérons deux angles aigus ABC, DEF (*fig.* 46); le côté DE est perpendiculaire sur BA, et le côté EF est perpendiculaire sur BC : les deux angles considérés sont égaux.

En effet, si l'on fait tourner l'angle DEF tout d'une pièce d'un angle droit autour de son sommet E, le nouvel angle D'EF', reproduction de DEF, aura ses côtés respectivement parallèles à ceux de ABC : ED' et BA seront parallèles comme perpendiculaires à DE; EF' et BC seront parallèles comme perpendiculaires à EF. D'ailleurs, les angles ABC, D'EF', ayant

les côtés parallèles et étant tous les deux aigus, ne sauraient être supplémentaires : ils sont donc égaux ; par suite, les angles ABC, DEF, le sont aussi.

Fig. 46.

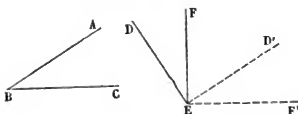
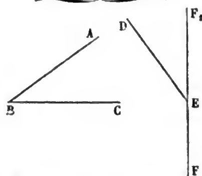


Fig. 47.



2° Si les deux angles comparés étaient obtus, on démontrerait de la même manière leur égalité.

3° Considérons enfin deux angles d'espèce différente, c'est-à-dire l'un ABC aigu, l'autre DEF obtus (*fig.* 47). En prolongeant FE au delà du sommet E, on forme un angle DEF_1 qui est le supplément de DEF : cet angle DEF_1 est donc aigu comme l'angle ABC; d'ailleurs, il a ses côtés respectivement perpendiculaires à ceux de ABC. Les angles ABC et DEF_1 sont donc égaux et, par suite, les angles proposés ABC et DEF sont supplémentaires.

EXERCICES.

1. Trouver le lieu géométrique des points situés à une distance donnée d'une droite donnée.

2. Un triangle quelconque est le quart de celui qu'on obtient en menant par chacun de ses sommets une parallèle au côté opposé. Chaque côté du nouveau triangle est le double du côté correspondant du triangle primitif.

3. Si deux droites égales AB et CD, comprises entre deux parallèles AC et BD, se coupent en un point O, on a AO = OC et OB = OD.

4. Si par le milieu D du côté AB d'un triangle ABC on mène une parallèle DE au côté BC, la droite DE passera par le milieu E de AC et sera égale à la moitié de BC. Réciproquement, la droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et égale à sa moitié.

5. Trouver le lieu des milieux des portions de droites qui vont d'un point donné à une droite donnée.

6. Démontrer : 1° que si deux angles ont leurs côtés respectivement parallèles, leurs bissectrices sont parallèles ou perpendiculaires entre elles; 2° que si deux angles ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, leurs bissectrices sont perpendiculaires ou parallèles entre elles.

§ V.

Programme officiel : *Somme des angles d'un triangle, d'un polygone quelconque.*

DÉFINITIONS.

71. On donne le nom de *polygone* à une portion de plan ABCDEF terminée de toutes parts par des lignes droites (*fig.* 48). Les portions de droites AB, BC, CD, DE, EF, FA,

Fig. 48.

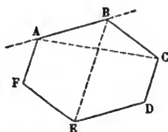
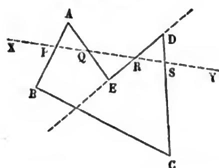


Fig. 49.



sont les *côtés* du polygone ; la somme de ces côtés forme le contour ou le *périmètre* du polygone; ce polygone a pour *sommets* les points A, B, C, D, E, F, et pour *angles* les angles ABC, BCD, CDE, DEF, etc., formés intérieurement par deux côtés consécutifs quelconques. Enfin, toute droite qui, comme AC ou BE, joint deux sommets non consécutifs du polygone est une *diagonale*.

Le plus simple de tous les polygones est le *triangle,* qui n'a que trois côtés. Après lui viennent : le *quadrilatère,* qui a quatre côtés; le *pentagone,* qui a cinq côtés; l'*hexagone,* qui a six côtés...; l'*octogone,* qui a huit côtés...; le *décagone,* qui a dix côtés...; le *pentédécagone,* qui a quinze côtés. La *fig.* 48 représente un hexagone.

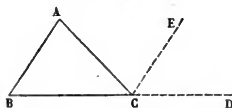
72. Une ligne brisée ou polygonale est dite *convexe* lorsqu'elle tombe tout entière d'un même côté de chacune des droites qui la composent, prolongées indéfiniment. Tel est, par exemple, le polygone ABCDEF (*fig.* 48). Le polygone ABCDE, au contraire (*fig.* 49), n'est pas convexe; car le côté DE, prolongé indéfiniment, laisse le polygone en partie au-dessus et en partie au-dessous de lui.

Une droite quelconque, tracée dans le plan d'une ligne polygonale convexe, ne peut la rencontrer en plus de deux points; car si une droite XY (*fig.* 49) rencontrait la ligne polygonale AEDC en trois points Q, R, S, les points Q et S se trouvant de part et d'autre du côté DE, la ligne AEDC ne serait pas tout entière d'un même côté par rapport à DE prolongé, c'est-à-dire qu'elle ne serait pas convexe.

THÉORÈME.

73. *La somme des angles d'un triangle quelconque* ABC *est égale à deux angles droits* (*fig.* 50).

Fig. 50.



En effet, prolongeons BC et menons CE parallèle à BA. Les angles BAC, ACE, sont égaux comme alternes-internes par rapport aux parallèles AB et CE coupées par AC. Les angles ABC, ECD, sont égaux comme correspondants par rapport aux parallèles BA et CE coupées par BD. D'après cela, la somme des trois angles du triangle ABC est la même que celle des trois angles BCA, ACE, ECD, formés autour du point C au-dessus de la droite indéfinie BD; cette somme est donc égale à deux angles droits (20).

SCOLIE.

74. On voit par cette démonstration que l'angle ACD est la somme (9) des deux angles B et A; ainsi, *tout angle extérieur d'un triangle,* c'est-à-dire tout angle formé par un côté et le prolongement d'un autre côté, *est égal à la somme des deux angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents.*

COROLLAIRES.

75. *Un triangle ne saurait avoir qu'un seul angle droit et,* à fortiori, *qu'un seul angle obtus.*

76. *Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires.*

77. *Un angle quelconque d'un triangle est le supplément de la somme des deux autres.* D'où il suit que si deux triangles ABC, A'B'C', ont deux angles égaux chacun à chacun, $A = A'$ et $B = B'$, le troisième angle C du premier triangle est égal au troisième angle C' de l'autre. Il en résulte que deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal et deux angles égaux chacun à chacun, que ces angles soient ou non adjacents au côté égal.

78. *Deux triangles* ABC, A'B'C', *qui ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires chacun à chacun, ont leurs angles égaux chacun à chacun.*

En effet, deux angles qui ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires étant égaux ou supplémentaires, on a

$$A = A' \quad \text{ou} \quad A + A' = 2^d,$$
$$B = B' \quad \text{ou} \quad B + B' = 2^d,$$
$$C = C' \quad \text{ou} \quad C + C' = 2^d.$$

On ne peut donc faire que les trois hypothèses suivantes :

1° $A + A' = 2^d, \quad B + B' = 2^d, \quad C + C' = 2^d,$

2° $A = A', \quad B + B' = 2^d, \quad C + C' = 2^d,$

3° $A = A', \quad B = B',$ et par suite (77), $C = C'.$

Or, dans le premier cas, la somme des angles des deux triangles vaudrait 6 angles droits ; dans le second cas, cette somme surpasserait 4 angles droits de la quantité $A + A' = 2A$. La troisième combinaison est donc seule possible.

THÉORÈME.

79. *La somme des angles intérieurs d'un polygone convexe* ABCDEF *est égale à autant de fois deux angles droits qu'il a de côtés moins deux* (*fig.* 51).

En joignant l'un des sommets A à tous les sommets non adjacents, on décompose le polygone en autant de triangles qu'il a de côtés moins deux; car chaque triangle contient un seul côté du polygone, excepté les deux triangles extrêmes qui renferment chacun deux côtés de ce polygone. La somme des angles du polygone est égale à celle des angles de tous

ces triangles ; elle vaut donc autant de fois deux angles droits qu'il y a de triangles, c'est-à-dire autant de fois deux angles droits que le polygone a de côtés moins deux.

Scolie.

80. Si l'on désigne par n le nombre des côtés du polygone, la somme des angles aura pour expression, en prenant l'angle droit pour unité,

$$2(n-2) \quad \text{ou} \quad 2n-4.$$

On peut donc dire que *la somme des angles d'un polygone s'obtient en doublant le nombre des côtés et en retranchant 4*

Fig. 51.

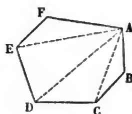
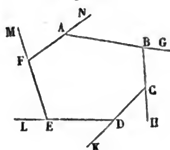


Fig. 52.



du résultat, l'angle droit étant toujours pris pour unité.

Si l'on fait dans cette formule $n=4$, on trouve 4 pour la somme cherchée. *La somme des angles d'un quadrilatère est donc égale à quatre angles droits;* d'où il suit que *si un quadrilatère a tous ses angles égaux, chacun de ces angles est droit.*

Corollaire.

81. *La somme des angles qu'on forme à l'extérieur d'un polygone convexe, en prolongeant successivement ses côtés dans le même sens, est égale à quatre angles droits* (*fig.* 52).

En effet, la somme d'un angle extérieur quelconque NAG et de l'angle intérieur adjacent FAB est égale à deux angles droits; donc, la somme des angles, tant intérieurs qu'extérieurs, du polygone est égale à autant de fois deux angles droits qu'il a de sommets ou de côtés. Cette somme surpasse donc de quatre angles droits (80) la somme des angles intérieurs : en d'autres termes, la somme des angles extérieurs est égale à quatre angles droits.

EXERCICES.

1. Toute ligne polygonale convexe est moindre que toute ligne polygonale enveloppante.

2. Un polygone convexe ne peut avoir plus de trois angles intérieurs aigus.

3. Étant donnés un triangle ABC et un point O pris dans son intérieur, démontrer que l'angle BOC est toujours plus grand que l'angle BAC du triangle.

4. Un angle d'un triangle est droit, aigu ou obtus, suivant que la médiane issue du sommet de cet angle est égale, supérieure ou inférieure à la moitié du côté opposé. Réciproques.

5. L'angle formé par la bissectrice de l'angle A d'un triangle ABC et par la perpendiculaire menée du sommet A sur le côté BC, est égal à la demi-différence des angles B et C.

6. Les bissectrices des trois angles d'un triangle concourent en un même point. La bissectrice de l'un des angles et celles des suppléments des deux autres angles concourent aussi en un même point.

7. Les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle concourent en un même point.

8. Les trois hauteurs d'un triangle (c'est-à-dire les perpendiculaires abaissées des sommets sur les côtés opposés) concourent en un même point.

9. Les trois médianes d'un triangle concourent en un même point, situé au tiers de chacune d'elles à partir du côté correspondant. A un plus grand côté correspond une plus petite médiane.

10. Dans un triangle, le point de concours des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés, le point de concours des trois médianes et celui des trois hauteurs sont en ligne droite, et la distance du premier point au second est moitié de la distance du second point au troisième.

11. Si l'on mène les bissectrices des angles extérieurs d'un triangle ABC, les trois triangles partiels et le triangle total qu'elles déterminent autour du triangle donné sont équiangles. Chaque angle du triangle ABC a pour supplément le double de l'angle qui lui est opposé dans le triangle total.

12. Dans un triangle ABC on mène, jusqu'au côté BC, une droite AD faisant avec le côté AB un angle égal à l'angle C et une droite AE faisant avec le côté AC un angle égal à l'angle B. Démontrer que le triangle DAE est isocèle.

13. Dans un triangle rectangle, si l'un des angles aigus est double de l'autre, l'hypoténuse est double du plus petit côté. Réciproque.

14. L'angle des bissectrices de deux angles consécutifs d'un quadrilatère convexe est égal à la demi-somme des deux autres angles du quadrilatère. L'angle des bissectrices de deux angles opposés est égal à la demi-différence des deux autres angles.

§ VI.

Programme officiel : *Propriétés des parallélogrammes.*

DÉFINITIONS.

82. Parmi les quadrilatères, on distingue :

1° Le *parallélogramme* (*fig.* 53), qui a ses côtés opposés parallèles deux à deux ;

2° Le *rectangle* (*fig.* 54), qui a tous ses angles égaux entre eux : il résulte du n° 80 que les quatre angles d'un rectangle sont droits;

3° Le *losange* (*fig.* 55), qui a tous ses côtés égaux entre

Fig. 53.



Fig. 54.



Fig. 55.



Fig. 56.



Fig. 57.



eux : nous démontrerons dans ce paragraphe que le rectangle et le losange sont des parallélogrammes ;

4° Le *carré* (*fig.* 56), qui a ses côtés égaux et ses angles égaux : le carré est à la fois un losange et un rectangle;

5° Le *trapèze* (*fig.* 57), dont deux côtés opposés seulement sont parallèles. Le trapèze est *rectangle* lorsqu'un de ses côtés non parallèles est perpendiculaire sur les deux côtés parallèles ; il est *isocèle* lorsque ses deux côtés non parallèles sont égaux.

THÉORÈME.

83. *Dans tout parallélogramme :*

1° *Les côtés opposés sont égaux deux à deux;*

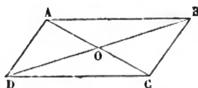
2° *Les angles opposés sont égaux deux à deux;*

3° *Les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales.*

Soit le parallélogramme ABCD (*fig.* 58).

1° Deux côtés opposés quelconques AB et CD, par exemple, sont égaux entre eux; car ce sont, par hypothèse, deux droites

Fig. 58.



parallèles comprises entre deux autres droites parallèles AD et BC (67).

2° Deux angles opposés quelconques, DAB et BCD, par exemple, sont égaux entre eux; car ils sont formés par des côtés parallèles deux à deux et de sens contraires (69). AB et CD sont en effet parallèles et de sens contraire, et il en est de même de AD et de CB.

3° Chacune des diagonales AC et BD est coupée par l'autre, au point O, en deux parties égales. En effet, les deux triangles AOB, DOC, ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, savoir : le côté AB égal au côté DC, comme côtés opposés du parallélogramme; l'angle OAB égal à l'angle OCD, comme alternes-internes par rapport aux parallèles AB et CD coupées par AC; et l'angle OBA égal à l'angle ODC, comme alternes-internes par rapport aux mêmes parallèles coupées par BD. Les triangles AOB, DOC, sont donc égaux. Par suite, le côté OB, opposé à l'angle OAB, est égal au côté OD opposé à l'angle OCD, et le côté OA opposé à l'angle OBA est égal au côté OC opposé à l'angle ODC.

THÉORÈME.

84. *Un quadrilatère est un parallélogramme :*

1° *Si ses côtés opposés sont égaux deux à deux;*

2° *Si ses angles opposés sont égaux deux à deux;*

3° *Si deux côtés opposés sont à la fois égaux et parallèles;*

4° *Si ses diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales.*

Soit le quadrilatère ABCD (*fig.* 59).

1° Menons la diagonale AC. Les deux triangles ABC, ADC, sont égaux comme ayant les trois côtés égaux, savoir : AC commun, AB et CD égaux entre eux par hypothèse, ainsi que AD

et BC. Par suite, l'angle BAC opposé à BC est égal à l'angle ACD opposé à AD ; et comme ces angles occupent, par rapport aux

Fig. 59.

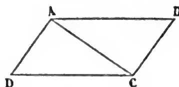
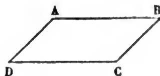


Fig. 60.



deux droites AB et CD et à la sécante AC, la position d'alternes-internes, les deux côtés AB et CD sont parallèles (64). De même, l'égalité des angles BCA et CAD entraîne le parallélisme des deux autres côtés AD et BC. Donc, le quadrilatère ABCD ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux est un parallélogramme.

2° Les angles opposés A et C étant égaux entre eux, ainsi que les angles B et D (*fig.* 60), on voit que deux angles consécutifs quelconques, B et C par exemple, ont une somme égale à la moitié de la somme des angles du quadrilatère, c'est-à-dire à deux droits. Ces deux angles B et C étant supplémentaires, et, de plus, intérieurs d'un même côté par rapport aux deux droites AB et CD coupées par BC, ces mêmes droites sont parallèles (64). On démontrerait de même que, les angles A et B étant supplémentaires, les deux autres côtés opposés, AD et BC, sont parallèles. Le quadrilatère ABCD est donc un parallélogramme.

3° Soient AB et CD les deux côtés opposés que l'on suppose égaux et parallèles (*fig.* 59). En menant la diagonale AC, on forme deux triangles ABC, ADC, qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, savoir : l'angle BAC égal à l'angle ACD, comme alternes-internes par rapport aux parallèles AB et CD coupées par AC ; le côté AB égal au côté CD par hypothèse, et le côté AC commun. De l'égalité des triangles ABC, ADC, résulte celle des angles ACB et CAD ; et comme ces angles sont alternes-internes par rapport aux deux droites AD et BC coupées par AC, ces mêmes droites sont parallèles. Le quadrilatère ABCD ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux est un parallélogramme.

4° Puisqu'on suppose OA = OC et OB = OD (*fig.* 58), les angles AOB et COD étant d'ailleurs opposés par le sommet, les

deux triangles AOB, COD, sont égaux (33). Donc, l'angle OAB est égal à l'angle OCD. D'ailleurs, ces angles étant alternes-internes par rapport aux droites AB et CD coupées par AC, les côtés opposés AB et CD sont parallèles. De l'égalité des triangles AOD, BOC, on déduirait pareillement l'égalité des angles OAD, OCB, et, par suite, le parallélisme des deux autres côtés opposés AD et BC. Le quadrilatère ABCD, ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux, est donc un parallélogramme.

SCOLIE.

85. *Tout rectangle est un parallélogramme dont les diagonales sont égales* (*fig.* 61).

D'abord, tout rectangle est un parallélogramme, puisque ses angles opposés sont égaux (84, 2°). En second lieu, les deux

Fig. 61.

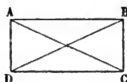
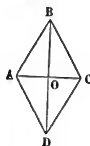


Fig. 62.



triangles DAB, CBA, par exemple, sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, savoir: l'angle droit DAB égal à l'angle droit CBA, le côté AB commun, et le côté AD égal au côté BC, comme côtés opposés d'un parallélogramme; donc, les diagonales AC et BD, hypoténuses des triangles rectangles égaux DAB, CBA, sont égales.

86. *Tout losange est un parallélogramme dont les diagonales sont: 1° perpendiculaires l'une sur l'autre; 2° bissectrices des angles opposés* (*fig.* 62).

D'abord, tout losange est un parallélogramme, puisque ses côtés opposés sont égaux (84, 1°).

En second lieu, les triangles ABC et ADC étant isocèles, puisque les quatre côtés d'un losange sont égaux, la diagonale BD, qui passe par le milieu O de la diagonale AC, est à la fois perpendiculaire sur AC et bissectrice des angles B et D (37). Pour une raison analogue, la diagonale AC est bissectrice des angles A et C.

87. *Tout carré est un parallélogramme dont les diagonales sont égales, perpendiculaires entre elles et bissectrices des angles opposés.*

EXERCICES.

1. Tout parallélogramme dont les diagonales sont égales est un rectangle.

2. Tout parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires entre elles, ou dont l'une des diagonales est bissectrice des angles dont elle unit les sommets, est un losange.

3. Tout parallélogramme dont les diagonales sont égales et perpendiculaires entre elles, ou bien dont les diagonales sont égales, l'une d'elles étant la bissectrice des angles dont elle unit les sommets, est un carré.

4. Deux quadrilatères convexes sont égaux, lorsqu'ils ont un angle égal et leurs quatre côtés égaux chacun à chacun et disposés de la même manière. Énoncer le théorème correspondant pour le cas de deux parallélogrammes, de deux rectangles, de deux losanges, de deux carrés.

5. Deux trapèzes sont égaux lorsqu'ils ont leurs quatre côtés égaux chacun à chacun et disposés de la même manière.

6. Toute droite comprise entre deux côtés opposés d'un parallélogramme et passant par le point d'intersection de ses diagonales (ou par le *centre* de ce parallélogramme) : 1° est divisée par ce point en deux parties égales; 2° divise le parallélogramme en deux quadrilatères égaux.

7. Tout quadrilatère est la moitié du parallélogramme que l'on obtient en menant par les extrémités de chaque diagonale des parallèles à l'autre diagonale. Déduire de ce théorème que deux quadrilatères ont même surface lorsque leurs diagonales sont respectivement égales et se coupent sous le même angle.

8. Les droites qui joignent successivement les milieux des côtés d'un quadrilatère forment un parallélogramme.

9. En divisant arbitrairement, mais de la même manière, les côtés d'un carré, et en joignant successivement les points de division, on forme un nouveau carré inscrit dans le premier.

10. Si, par un point quelconque de la base d'un triangle isocèle, on mène des parallèles aux deux autres côtés, on forme un parallélogramme dont le périmètre est constant.

11. Démontrer que, dans tout trapèze isocèle, les angles opposés sont supplémentaires.

QUESTIONS PROPOSÉES

SUR LE PREMIER LIVRE.

1. Si, par le point d'intersection I des bissectrices des angles B et C d'un triangle ABC, on mène entre les côtés de l'angle A la parallèle DIE à BC, la droite DE sera égale à la somme de BD et de CE. Si, par le point d'intersection I' de la bissectrice de l'angle B et de celle du supplément de l'angle C, on mène entre les côtés de l'angle A ou de son opposé par le sommet la parallèle D'I'E' à BC, la droite D'E' sera égale à la différence de BD' et de CE'.

2. Des extrémités A et B et du milieu C d'une droite AB, on mène des perpendiculaires AA', BB', CC', sur une droite indéfinie XY. Démontrer que le point C' est le milieu de A'B', et que la perpendiculaire CC' est égale à la demi-somme ou à la demi-différence des perpendiculaires AA' et BB', suivant que les points A et B sont situés d'un même côté ou de part et d'autre de XY.

3. La somme des distances d'un point quelconque de la base d'un triangle isocèle aux deux autres côtés est constante. Qu'arrive-t-il lorsque le point considéré est pris sur le prolongement de la base?

4. Trouver le lieu géométrique des points dont la somme ou la différence des distances à deux droites fixes est constamment égale à une longueur donnée.

5. La somme des distances d'un point pris à l'intérieur d'un triangle équilatéral à ses trois côtés est constante. Qu'arrive-t-il lorsque le point considéré est extérieur au triangle?

6. AD et BC étant deux parallèles coupées obliquement par AB et perpendiculairement par AC, on mène entre ces deux parallèles la droite BED qui coupe AC en E, de manière que ED = 2AB : démontrer que l'angle DBC est le tiers de l'angle ABC.

7. Dans un triangle ABC, on prend sur le côté AB et sur son prolongement AD = AE = AC, puis on joint le sommet C aux points D et E. Démontrer que l'angle E est la moitié de l'angle A du triangle ABC, et que l'angle DCE est droit.

8. Étant donné un parallélogramme ABCD, on prend en sens inverse, sur les côtés opposés AB, CD, deux longueurs AE et CF, arbitraires, mais égales; de même, sur les côtés opposés AD, BC, on prend en sens inverse les longueurs arbitraires AH = CG. Démontrer : 1° que la figure EGFH est un parallélogramme inscrit dans le parallélogramme proposé; 2° que le *centre* du parallélogramme proposé est en même temps celui de tous les parallélogrammes qu'on peut y inscrire.

9. Le point de rencontre des droites qui joignent les milieux des côtés opposés d'un quadrilatère quelconque est le milieu de la droite qui unit les milieux des diagonales de ce quadrilatère.

10. Les bissectrices des angles d'un quadrilatère convexe forment un second quadrilatère dont les angles opposés sont supplémentaires. Lorsque le premier quadrilatère est un parallélogramme, le second est un rectangle dont les diagonales sont parallèles aux côtés du parallélogramme et égales à la différence de ses côtés adjacents. Lorsque le premier quadrilatère est un rectangle, le second est un carré.

11. ABC étant un triangle rectangle et ABDM, ACEN, étant les carrés construits sur les côtés AB et AC de l'angle droit, des sommets D et E, opposés au sommet A, on abaisse des perpendiculaires DF, EG, sur l'hypoténuse BC prolongée. Démontrer : 1° que l'hypoténuse BC est égale à la somme des perpendiculaires DF et EG; 2° que le triangle proposé ABC est la somme des triangles DFB, CEG.

12. Dans tout trapèze, les quatre points, milieux des deux côtés non parallèles et des deux diagonales, sont sur une même droite parallèle aux deux bases du trapèze; la distance des points extrêmes est égale à la demi-somme de ces bases; la distance des points intermédiaires est égale à leur demi-différence.

13. Sur un billard rectangulaire, dans quelle direction faut-il lancer la bille pour qu'elle revienne au point de départ après avoir frappé successivement les quatre côtés? Quelle est la longueur du chemin parcouru alors par la bille? (On admet que lorsque la bille frappe une bande, les deux droites qu'elle suit, avant et après le choc, sont également inclinées sur la bande.)

14. ABCD étant un parallélogramme, E et F étant les milieux des côtés opposés AB et CD, les droites BF et DE divisent la diagonale AC en trois parties égales.

15. Étant donnés deux parallèles XY, X'Y', et deux points A et B situés hors de ces parallèles et de côtés différents, on demande de trouver le plus court chemin de A en B, par une ligne brisée AMNB telle, que la portion MN comprise entre les deux parallèles ait une direction donnée.



LIVRE II.

LA CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

§ I.

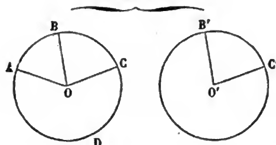
PROGRAMME OFFICIEL : *Dépendance mutuelle des arcs et des cordes, des cordes et de leurs distances au centre.*

DÉFINITIONS.

88. La *circonférence* est une ligne courbe ABCD (*fig.* 63), dont tous les points sont également distants d'un point intérieur O qu'on nomme *centre.*

Le *cercle* est l'espace limité par la circonférence.

Fig. 63.



On appelle *rayon* toute droite menée du centre à la circonférence. *Tous les rayons* OA, OB, OC,..., *d'un cercle sont égaux,* d'après la définition même de la circonférence.

Deux cercles de même rayon sont égaux; car si l'on place le centre O' du second (*fig.* 63) sur le centre O du premier, l'égalité des rayons entrainera la coïncidence des deux circonférences.

89. On nomme *arc* une portion quelconque AB de circonférence.

Deux arcs de même rayon, BC *et* B'C' (*fig.*63), *sont dits égaux, lorsqu'on peut les placer l'un sur l'autre de manière qu'ils coïncident.*

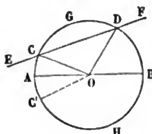
4

Pour ajouter deux arcs de même rayon, AB et B′C′, on porte le second en BC à la suite du premier, sur le cercle O auquel ce premier arc appartient, de manière qu'ils aient une extrémité B commune; l'arc ABC, compris entre les extrémités non communes A et C, est dit *la somme* des deux arcs proposés.

90. Un point est *intérieur* ou *extérieur* à un cercle suivant que sa distance au centre est *plus petite* ou *plus grande* que le rayon.

91. *Une droite quelconque* EF *ne peut rencontrer une circonférence* O *en plus de deux points* C *et* D (*fig.* 64).

Fig. 64.



En effet, du centre O à la droite EF, on ne peut mener au plus (44) que deux droites OC et OD égales au rayon.

92. On donne le nom de *sécante* à toute droite EF qui coupe la circonférence en deux points C et D. On appelle *corde* la partie CD intérieure au cercle, et l'on réserve le nom de *diamètre* aux cordes qui passent par le centre.

Tous les diamètres d'un cercle sont égaux, car un diamètre quelconque AB est la somme de deux rayons OA et OB.

93. 1° *Le diamètre est la plus grande corde du cercle;*

2° *Tout diamètre* AB *divise la circonférence et le cercle en deux parties égales* (*fig.* 64).

En effet:

1° Une corde quelconque CD est moindre que la somme OC + OD des deux rayons qui aboutissent à ses extrémités; elle est donc moindre qu'un diamètre.

2° Si l'on plie la figure autour d'un diamètre AB, un rayon quelconque OC de la partie supérieure prendra la direction

du rayon OC′ qui fait de l'autre côté de AB un angle C′OA égal à l'angle COA; et à cause de l'égalité des rayons, le point C de l'arc supérieur AGB tombera en C′ sur l'arc inférieur AHB. Ces deux arcs AGB, AHB, se recouvrant exactement, sont donc égaux ainsi que les espaces compris entre chacun d'eux et le diamètre AB.

94. Une corde quelconque CD, autre qu'un diamètre, divise d'après cela la circonférence en deux arcs *inégaux*, l'un CGD moindre que la demi-circonférence, l'autre CHD plus grand. On dit que la corde CD *sous-tend* ces deux arcs. Toutefois, quand nous parlerons de *l'arc sous-tendu par une corde* CD, il faudra toujours entendre, à moins d'avertissement contraire, qu'il s'agit du plus petit des deux arcs correspondant à cette corde.

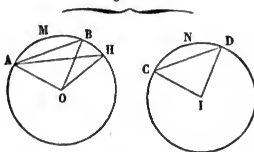
THÉORÈME.

95. *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :*

1° *Deux arcs égaux sont sous-tendus par des cordes égales ;*

2° *De deux arcs inégaux, le plus grand est sous-tendu par la plus grande corde* (*fig.* 65).

Fig. 65.



Soient O et I deux cercles égaux :

1° Si l'arc AMB est égal à l'arc CND, les cordes AB et CD seront égales. En effet, portons le cercle I sur le cercle O de manière que le rayon IC coïncide avec son égal OA, I étant en O et C en A. Les circonférences coïncideront, l'arc CND tombera sur son égal AMB, et le point D viendra en B. La corde CD s'appliquera donc sur la corde AB, et, par suite, lui sera égale.

2° Si l'arc AMH est plus grand que l'arc CND, la corde AH sera plus grande que la corde CD. En effet, prenons à partir

du point A, sur l'arc AMH, un arc AMB égal à l'arc CND; les cordes AB, CD seront égales (1°), et il restera à démontrer que la corde AB est moindre que la corde AH. Or, l'arc AMB étant moindre que l'arc AMH, le point B tombe entre les points A et H, et l'angle AOB est inférieur à l'angle AOH. Par suite, les deux triangles AOB, AOH, ont un angle inégal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir OA commun et OB = OH comme rayons d'un même cercle. Donc (32), le côté AB opposé à l'angle AOB est moindre que le côté AH opposé à l'angle AOH.

96. Du théorème qu'on vient de démontrer et du principe général du n° 39 il suit que :

Réciproquement, *dans un même cercle ou dans des cercles égaux, à des cordes égales répondent des arcs égaux, et à une plus grande corde répond un plus grand arc.*

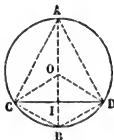
Scolie.

97. Nous n'avons considéré dans ce qui précède que des arcs moindres qu'une demi-circonférence (94). Si l'on considérait des arcs plus grands qu'une demi-circonférence, pour la seconde partie du théorème les conclusions seraient inverses : l'arc augmentant, la corde diminuerait au lieu de croître.

THÉORÈME.

98. *Le diamètre* AB, *perpendiculaire sur une corde* CD

Fig. 66.



divise cette corde et les deux arcs CBD, CAD, *qu'elle sous-tend, chacun en deux parties égales* (*fig.* 66).

En effet, soient O le centre de la circonférence et I le point de rencontre du diamètre AB et de la corde CD. Les rayons OC,

OD, étant, par rapport à la perpendiculaire OI, deux obliques égales, s'écartent également du pied de cette perpendiculaire. On a donc CI = ID. En d'autres termes, la corde CD est divisée au point I en deux parties égales. Dès lors, AB étant perpendiculaire sur le milieu de CD, tout point de AB, et en particulier le point B, est équidistant des points C et D. Les cordes BC et BD sont donc égales et, par suite, les arcs BC et BD sont aussi égaux. En d'autres termes, l'arc CBD est divisé au point B en deux parties égales. On démontrerait de même que l'arc CAD est aussi divisé en deux parties égales au point A.

COROLLAIRES.

99. La droite AB satisfait d'après cela aux *cinq* conditions suivantes : elle passe par le centre O, par le milieu I de la corde CD, et par les milieux A et B de chacun des arcs que cette corde sous-tend; elle est enfin perpendiculaire sur la corde CD. Or, deux de ces cinq conditions suffisent pour déterminer la droite AB; car on sait que, par deux points, on ne peut mener qu'une droite, et que par un point on ne peut mener qu'une perpendiculaire sur une droite. Donc, toute ligne droite assujettie à deux des cinq conditions énoncées remplira nécessairement les trois autres. De là, une série de propositions que le lecteur énoncera sans difficulté, et parmi lesquelles nous ne citerons que les suivantes : *La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde passe par le centre et par le milieu de chacun des arcs que cette corde sous-tend.*

Le lieu géométrique des milieux d'un système de cordes parallèles est le diamètre perpendiculaire à la direction commune de ces cordes.

THÉORÈME.

100. *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :*

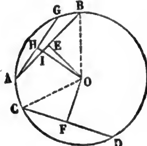
1° *Deux cordes égales sont également éloignées du centre;*

2° *De deux cordes inégales, la plus petite est la plus éloignée du centre* (*fig.* 67).

1° Soient les deux cordes égales AB, CD, et soient OE, OF, les perpendiculaires menées du centre O sur chacune d'elles. Les longueurs de ces perpendiculaires mesurent (41) les dis-

tances du centre à ces deux cordes, et il s'agit de démontrer que ces distances sont égales. Or, les triangles rectangles EOB,

Fig. 67.



COF, sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et un côté égal, savoir : OB = OC comme rayons d'un même cercle, et EB = CF comme moitiés de cordes égales, puisque les pieds E et F des perpendiculaires OE et OF sont (98) les milieux des cordes AB et CD. Donc, OE troisième côté du triangle OEB est égal à OF troisième côté du triangle OCF.

2° Soient les deux cordes inégales AG et CD. On suppose AG moindre que CD, et il faut démontrer que la perpendiculaire OH, menée du centre sur la première corde, est plus grande que la perpendiculaire OF. Par le point A, menons une corde AB égale à CD. La distance OE du centre à cette corde sera égale à OF, et il reste à démontrer que OE est moindre que OH. Or, la corde AG étant moindre que la corde AB, l'arc AG est inférieur à l'arc AB et, par suite, le centre O du cercle et le milieu H de la corde AG sont situés de part et d'autre de la droite AB. Donc AB rencontre OH en un point I situé entre O et H, et l'on a $OI < OH$. Mais, puisque OE est perpendiculaire sur AB, OI est oblique, et l'on a

$$OE < OI.$$

Donc, à fortiori,

$$OE < OH.$$

101. Du théorème qu'on vient de démontrer et du principe général du n° 39, il résulte que :

Réciproquement, *dans un même cercle ou dans des cercles égaux, deux cordes également éloignées du centre sont égales; et, de deux cordes inégalement éloignées du centre, la plus éloignée est la plus petite.*

EXERCICES.

1. La plus petite et la plus grande des droites qu'on peut mener d'un point à une circonférence, passent par le centre.

2. Quel est le lieu géométrique des points situés à une distance donnée d'une circonférence donnée?

3. Une droite de longueur constante reste parallèle à elle-même, tandis que l'une de ses extrémités décrit une circonférence; quel est le lieu de l'autre extrémité?

4. On donne un cercle O et un point A pris dans son plan; on demande le lieu des milieux des droites qui joignent le point A aux divers points de la circonférence O.

5. Quel est le lieu géométrique des sommets des triangles qui reposent sur une base fixe BC et dans lesquels la médiane issue du sommet B a une longueur donnée?

6. Étant donnés une circonférence et un point dans son plan, quelle est la plus petite corde qu'on puisse mener par ce point dans la circonférence?

7. Si deux cordes égales se coupent à l'intérieur ou à l'extérieur d'une circonférence, les segments déterminés sur ces deux cordes par leur point de rencontre sont respectivement égaux.

8. Par un point A extérieur à une circonférence O, on mène une sécante ACD dont la partie extérieure AC est égale au rayon; on mène en outre le diamètre AOB : démontrer que l'angle COA est le tiers de l'angle DOB.

9. Deux cordes égales AB et CD étant données dans un cercle, on prolonge chacune d'elles d'une même quantité quelconque BE = DF ; démontrer que la perpendiculaire élevée sur le milieu de EF passe par le centre du cercle.

10. Trouver le lieu des points qui partagent dans un rapport donné toutes les cordes égales d'un même cercle.

§ II.

Programme officiel : *Tangente au cercle. — Intersection et contact de deux cercles.*

DÉFINITION.

102. On nomme *tangente* au cercle toute droite CD (*fig.* 68) qui n'a qu'un point commun avec la circonférence. Ce point commun A est appelé *point de contact.*

THÉORÈME.

103. *Toute perpendiculaire* CD, *à l'extrémité d'un rayon* OA, *est tangente à la circonférence* (*fig.* 68).

Fig. 68.

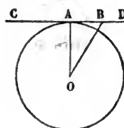
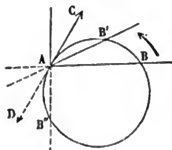


Fig. 69.



En effet, en joignant au centre O un point quelconque B de CD, autre que le point A, on obtient une droite OB oblique sur CD, puisque OA est la perpendiculaire à CD qui passe par le point O. Cette droite OB est donc plus grande que le rayon OA (40) et, par suite, le point B est extérieur au cercle (90). La droite CD ayant tous ses points hors du cercle, sauf le point A, qui est commun aux deux lignes, est donc une tangente à la circonférence.

104. Réciproquement, *toute tangente* CD *à la circonférence est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* OA *qui aboutit au point de contact* A (*fig.* 68).

En effet, tout point B de la tangente CD, autre que le point A, étant extérieur au cercle, sa distance BO au centre est plus grande que le rayon (90). Donc, le rayon OA est la plus courte de toutes les droites qu'on peut mener du centre à la tangente CD; en d'autres termes, OA est perpendiculaire sur

CD (43), et inversement, la tangente CD est perpendiculaire au point A sur le rayon OA.

COROLLAIRES.

105. *Par un point A d'une circonférence O, on peut toujours mener une tangente à cette courbe, et on ne peut en mener qu'une.*

106. *Toute tangente est parallèle aux cordes que le diamètre mené au point de contact divise en deux parties égales* (98).

SCOLIE.

107. On peut considérer la tangente AC en un point A d'une circonférence (*fig.* 69), *comme la position limite d'une sécante* AB *issue du point* A, *lorsque cette sécante tourne autour de* A *de manière que le second point d'intersection* B *vienne se confondre avec le premier.* Car, au moment où les deux points d'intersection B et A sont ainsi réunis en un seul, la droite AC n'a plus qu'un point commun avec la circonférence.

Cette nouvelle définition de la tangente est applicable à toutes les courbes. D'ailleurs, nous verrons plus tard qu'outre sa généralité, cette définition a sur celle du n° 102 l'avantage de mettre en lumière l'intime corrélation de certains théorèmes qui sembleraient sans cela tout à fait distincts.

On dit qu'une courbe ou qu'un arc de courbe est *convexe*, lorsque cette courbe ou cet arc tombe entièrement d'un même côté de chacune de ses tangentes (72). Il résulte du n° 103 que la circonférence de cercle est une courbe convexe.

Nous avons vu au n° 91 qu'une droite quelconque ne peut rencontrer une circonférence en plus de deux points. Tout arc de courbe convexe jouit de la même propriété; car si une droite coupait cet arc en trois points, le premier et le dernier point seraient situés de part et d'autre de la tangente au point intermédiaire.

THÉORÈME.

108. *Deux parallèles interceptent sur la circonférence des arcs égaux.*

Il faut distinguer trois cas :

1° Supposons (*fig.* 70) que les parallèles AB, CD, soient sé-

Fig. 70.

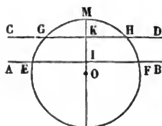


Fig. 71.

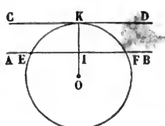
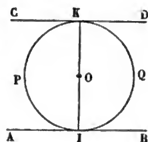


Fig. 72.



cantes, et abaissons du centre O sur ces droites la perpendiculaire commune OM qui coupe la circonférence en M. Le point M est (98) à la fois le milieu de l'arc EMF que sous-tend la corde EF, et le milieu de l'arc GMH que sous-tend la corde GH; on a donc

$$\text{arc EM} = \text{arc FM}, \quad \text{arc GM} = \text{arc HM},$$

d'où, en soustrayant membre à membre,

$$\text{arc EM} - \text{arc GM} = \text{arc FM} - \text{arc HM},$$

c'est-à-dire

$$\text{arc EG} = \text{arc FH}.$$

2° Supposons (*fig.* 71) que les parallèles AB et CD soient l'une sécante et l'autre tangente. Alors le rayon OK qui aboutit au point de contact est (98, 104) une perpendiculaire commune à la tangente CD et à la corde EF qui lui est parallèle; il divise donc l'arc EKF, sous-tendu par cette corde, en deux parties égales, et l'on a

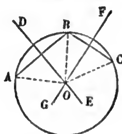
$$\text{arc EK} = \text{arc FK}.$$

3° Supposons enfin (*fig.* 72) que les deux parallèles AB et CD soient tangentes, l'une en I et l'autre en K. Les deux rayons OI et OK, respectivement perpendiculaires à AB et à CD, seront dans le prolongement l'un de l'autre, puisque des droites parallèles ont leurs perpendiculaires communes. Les deux arcs KPI, KQI, sont donc égaux l'un et l'autre à une demi-circonférence.

THÉORÈME.

109. *Par trois points* A, B, C, *non situés en ligne droite, on peut toujours faire passer une circonférence, et on ne peut en faire passer qu'une* (*fig.* 73).

Fig. 73.



Il s'agit de prouver qu'il existe un point, et un seul, situé à la même distance des trois points donnés A, B, C.

Or, tout point équidistant de A, B, C, doit se trouver sur la perpendiculaire DE élevée sur le milieu de AB, parce qu'elle est le lieu des points équidistants de A et de B; il doit aussi appartenir à la perpendiculaire FG élevée sur le milieu de BC, parce qu'elle est le lieu des points équidistants de B et de C. Comme deux droites DE, FG, ne peuvent avoir qu'un point commun, on voit d'abord qu'il ne saurait jamais exister qu'un seul point équidistant des points A, B, C. En second lieu, un tel point existe toujours si, conformément à notre hypothèse, les points A, B, C, ne sont pas en ligne droite; car, les deux droites AB et BC se coupant, les droites DE et FG qui leur sont respectivement perpendiculaires doivent se rencontrer en un certain point O (66, 2°).

Le cercle décrit de ce point O comme centre, avec l'une des trois droites égales OA, OB, OC, pour rayon, passe par les points A, B, C, et est le seul qui puisse y passer.

On énonce souvent ce théorème d'une manière plus rapide eu disant: *Trois points, non en ligne droite, déterminent une circonférence.*

COROLLAIRE.

110. Deux circonférences ne peuvent avoir trois points communs sans coïncider; d'où il suit que *deux circonférences distinctes ne peuvent avoir plus de deux points communs.*

Lorsque deux circonférences ont deux points communs, on dit qu'elles se coupent ou qu'elles sont *sécantes*.

Lorsque deux circonférences n'ont qu'un point commun, on dit qu'elles sont *tangentes*; le point commun est appelé *point de contact*.

THÉORÈME.

111. *Lorsque deux circonférences se coupent, la droite* OO' *qui joint leurs centres est perpendiculaire sur la corde commune* AB *et divise cette corde en deux parties égales* (*fig.* 74).

Fig. 74.

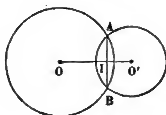
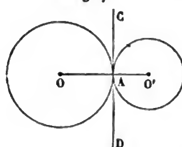


Fig. 75.



En effet, la perpendiculaire élevée sur la corde commune AB par son milieu I doit passer par le centre de chacune des deux circonférences O et O' (99).

COROLLAIRE.

112. Supposons que la circonférence O restant fixe, ainsi que le point A, la circonférence O' tourne autour du point A, de manière que le second point d'intersection B se rapproche de plus en plus du premier et vienne à la limite se confondre avec lui comme dans la *fig.* 75. Les deux circonférences n'ayant plus alors qu'un point commun A seront tangentes en ce point. D'ailleurs, la droite OO' passant toujours entre A et B, ces deux points ne peuvent se réunir que sur la ligne des centres OO'. Enfin, en vertu de ce mouvement (107), la corde commune devient à la limite tangente en A à chacune des deux circonférences. Donc,

Lorsque deux circonférences O *et* O' *sont tangentes, leur point de contact* A *est situé sur la droite des centres, et la perpendiculaire* CD *élevée en ce point sur cette droite est une tangente commune aux deux circonférences.*

On appelle *angle de deux courbes* qui ont un point commun, l'angle formé par les tangentes à ces deux courbes en ce point.

Si cet angle n'est pas nul, on dit que les deux courbes se coupent. S'il est nul, c'est-à-dire si les deux courbes ont la même tangente au point commun, on dit que ces courbes sont tangentes. On appelle *orthogonales* deux courbes qui se coupent à angle droit.

Scolie.

113. Deux circonférences distinctes peuvent avoir deux points communs, c'est-à-dire se couper (*fig.* 78); ou avoir un seul point commun, c'est-à-dire être tangentes, soit extérieurement (*fig.* 77), soit intérieurement (*fig.* 79); ou enfin n'avoir aucun point commun, c'est-à-dire être extérieures (*fig.* 76) ou intérieures (*fig.* 80) l'une à l'autre. Leurs positions relatives sont donc au nombre de cinq.

THÉORÈME.

114. 1° *Si deux circonférences* O *et* O′ *sont extérieures, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons;*

2° *Si elles sont tangentes extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons;*

3° *Si elles se coupent, la distance des centres est à la fois moindre que la somme et plus grande que la différence des rayons;*

4° *Si elles sont tangentes intérieurement, la distance des centres est égale à la différence des rayons;*

5° *Si elles sont intérieures, la distance des centres est moindre que la différence des rayons.*

En effet:

1° A et A′ (*fig.* 76) étant les points où la ligne des centres

Fig. 76.

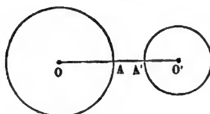
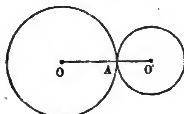


Fig. 77.



coupe les deux circonférences, on a

$$OO' = OA + AA' + O'A' \quad \text{ou} \quad OO' > OA + O'A'.$$

2° Le point de contact A (*fig.* 77) est situé entre les deux centres et sur la droite OO′ qui les joint. On a donc

$$OO' = OA + O'A.$$

3° Les deux points communs (*fig.* 78) étant situés hors de la ligne des centres (**111**), en joignant l'un d'eux B aux deux centres, on forme un triangle dans lequel on a (27, 28)

$$OO' < OB + O'B \quad \text{et} \quad OO' > OB - O'B.$$

4° Le point de contact A (*fig.* 79) est situé au delà des deux

Fig. 78.

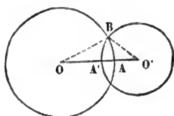


Fig. 79.

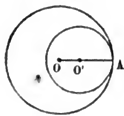
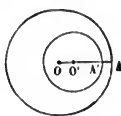


Fig. 80.



centres et sur la droite qui les joint. On a donc

$$OA = OO' + O'A, \quad \text{d'où} \quad OO' = OA - O'A.$$

5° A et A′ (*fig.* 80) étant les points où la droite OO′ coupe les deux circonférences, on a

$$OA = OO' + O'A' + A'A, \quad \text{d'où} \quad OA > OO' + O'A',$$

c'est-à-dire

$$OO' < OA - O'A'.$$

COROLLAIRE.

115. A chacune des cinq hypothèses faites répond une conclusion distincte. Donc, en vertu du principe général du n° 39, les réciproques des propositions précédentes sont toutes vraies. Voici leurs énoncés :

1° *Si la distance des centres est plus grande que la somme des rayons, les deux circonférences données sont extérieures l'une à l'autre;*

2° *Si la distance des centres est égale à la somme des rayons, les deux circonférences sont tangentes extérieurement;*

3° *Si la distance des centres est à la fois moindre que la somme et plus grande que la différence des rayons, les deux circonférences se coupent;*

4° *Si la distance des centres est égale à la différence des rayons, les deux circonférences sont tangentes intérieurement;*

5° *Si la distance des centres est moindre que la différence des rayons, les deux circonférences sont intérieures l'une à l'autre.*

Ainsi, connaissant les trois nombres D, R, r, qui mesurent respectivement la distance des centres et les rayons de deux circonférences, on peut, sans tracer ces circonférences et par une simple opération numérique, savoir quelle est leur position relative. Par exemple, si l'on a $D = 15^m$, $R = 21^m$, $r = 6^m$, on peut affirmer que les deux circonférences sont tangentes intérieurement; car on a $15 = 21 - 6$, ou $D = R - r$.

EXERCICES.

1. Retrouver la propriété caractéristique de la tangente au cercle, en partant de la définition du n° 107.

2. La plus petite et la plus grande des droites qu'on peut mener entre deux circonférences, passent par les centres de ces circonférences.

3. Si deux cordes AB et CD se coupent dans un cercle, la somme AC + BD des arcs qu'elles interceptent est égale à la somme des arcs interceptés par les deux diamètres parallèles à ces cordes.

4. Un cercle étant donné, combien faut-il de cercles de même rayon pour l'entourer?

5. Parmi les sécantes qui passent par l'un des points d'intersection de deux circonférences données, quelle est celle pour laquelle la longueur comprise entre les deux circonférences est maximum?

6. AB étant un diamètre fixe d'un cercle, et CD une corde parallèle à ce diamètre, on mène CB et DA qui se coupent en M, puis CA et DB qui se coupent en N. Trouver le lieu des points M et N quand la corde CD se déplace parallèlement à elle-même.

7. Si deux circonférences égales se coupent orthogonalement, la corde commune est égale à la distance des centres.

8. On donne un cercle de centre O et de rayon R, et un point extérieur A. Du point A comme centre, avec OA pour rayon, on décrit un arc BOC, et du point O comme centre avec 2R pour rayon, on décrit un nouvel arc qui coupe le précédent en B et en C. On mène OB et OC qui rencontrent respectivement en E et en D la circonférence primitive. Démontrer que AE et AD sont tangentes à cette circonférence.

§ III.

PROGRAMME OFFICIEL : *Mesure des angles. — Angle inscrit.*

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

116. On acquiert la notion du nombre entier en considérant des objets distincts et semblables. Nous allons expliquer comment le problème de la mesure des grandeurs conduit à étendre cette première idée.

On ne considère, en mathématiques, que les grandeurs dont on peut définir d'une manière précise *l'égalité et l'addition;* tels sont, par exemple, les angles : nous avons dit en effet, au n° 9, ce qu'on entend par angles égaux et par somme de deux angles. Une grandeur est *plus grande* qu'une autre quand elle est la somme de cette autre et d'une troisième de même nature.

Lorsqu'une grandeur est la somme de 2, 3, 4,..., parties, égales à une autre grandeur de même espèce, on dit que la première est un *multiple* de la seconde, et que la seconde est une *partie aliquote* de la première.

Deux grandeurs sont dites *commensurables* entre elles lorsqu'elles sont des multiples d'une troisième grandeur qu'on appelle alors leur *commune mesure;* dans le cas contraire, elles sont *incommensurables* entre elles.

117. Pour *mesurer* une grandeur, on cherche une commune mesure entre cette grandeur et une autre de même espèce, arbitraire, mais bien connue, et qui reçoit le nom d'*unité.*

Si cette commune mesure est l'unité elle-même, et que la grandeur proposée la contienne, par exemple, 3 fois sans reste, on dit que la grandeur est mesurée par le *nombre entier* 3.

Si cette commune mesure est une partie aliquote de l'unité; par exemple, si, l'unité étant partagée en cinq parties égales, la grandeur proposée est la somme de trois de ces parties, on dit que cette grandeur est les trois cinquièmes de l'unité et qu'elle est mesurée par le nombre *trois cinquièmes*, que l'on écrit $\frac{3}{5}$. On qualifie d'ailleurs un tel nombre de *fractionnaire*

pour le distinguer des nombres entiers seuls considérés jusque-là,

En résumé, *mesurer une grandeur commensurable avec l'unité, c'est chercher combien cette grandeur renferme d'unités ou de parties aliquotes de l'unité.* Suivant que la grandeur est un multiple de l'unité ou un multiple d'une partie aliquote de l'unité, *le nombre qui exprime sa mesure est entier ou fractionnaire.* Réciproquement, toute grandeur mesurée par un nombre entier ou fractionnaire est commensurable avec l'unité, car elle est un multiple de l'unité ou d'une partie aliquote de l'unité (*).

118. On nomme *rapport* d'une grandeur A à une grandeur B de même espèce le nombre par lequel il faut multiplier la seconde pour avoir la première. On désigne ce rapport par $\frac{A}{B}$.

119. *Le rapport de deux grandeurs* A *et* B *de même espèce est égal au nombre qui mesure la première lorsqu'on prend la seconde pour unité.*

En effet, si le rapport donné est, par exemple, $\frac{3}{5}$, la première grandeur est le produit de la seconde par $\frac{3}{5}$ (118); mais multiplier une grandeur par $\frac{3}{5}$, c'est en prendre les $\frac{3}{5}$. La première grandeur est donc les $\frac{3}{5}$ de la seconde, et, par suite (117), $\frac{3}{5}$ est le nombre qui mesure la première grandeur lorsqu'on prend la seconde pour unité.

120. Il résulte de là que *lorsque deux grandeurs* A *et* B *ont été mesurées avec une même unité* C, *on obtient leur rapport en divisant le nombre* α *qui mesure la première par le nombre* β *qui mesure la seconde.*

En effet, on a, d'après le théorème précédent, les deux re-

(*) *Voir* la Note I pour le cas où la grandeur est incommensurable avec l'unité.

lations

$$A = C.\alpha,\quad B = C.\beta,\quad \text{d'où}\quad C = \frac{B}{\beta},$$

et, par suite,

$$A = B\frac{\alpha}{\beta}.$$

Le quotient $\frac{\alpha}{\beta}$ exprime donc (118) le rapport de A à B.

On est ainsi conduit à appeler rapport de deux nombres quelconques α et β le quotient de leur division; et l'on démontre en Arithmétique que les règles de calcul des fractions à termes entiers sont applicables à ces rapports ou fractions générales $\frac{\alpha}{\beta}$. Par exemple, on n'altère pas ces rapports en multipliant leurs deux termes par un même nombre; on les multiplie en les multipliant terme à terme, etc.

121. Lorsque deux grandeurs de nature différente ont une dépendance telle, que le rapport de deux valeurs quelconques de la première soit égal au rapport des valeurs correspondantes de la seconde, on dit que ces deux grandeurs sont *proportionnelles.*

122. On nomme *angle au centre* tout angle qui a son sommet au centre d'un cercle, et *angle inscrit* tout angle formé par deux cordes qui se coupent sur la circonférence d'un cercle.

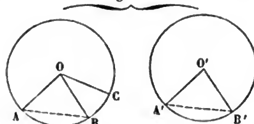
THÉORÈME.

123. *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux :*

1° *Deux angles au centre égaux interceptent des arcs égaux ;*

2° *Si un angle au centre est la somme de deux autres angles*

Fig. 81.



au centre, l'arc intercepté par cet angle est la somme des arcs interceptés par les deux autres (fig. 81).

1° Soient AOB, A′O′B′, deux angles au centre, égaux entre eux; les deux arcs correspondants AB et A′B′ seront égaux. En effet, en menant les cordes AB, A′B′, on forme deux triangles AOB, A′O′B′, qui sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, savoir : l'angle AOB égal à l'angle A′O′B′ par hypothèse, et les côtés OA = O′A′, OB = O′B′, comme rayons de cercles égaux. Donc la corde AB est égale à la corde A′B′, et, par suite (96), les arcs AB et A′B′ que ces cordes sous-tendent sont égaux entre eux.

2° Soient A′O′B′ et BOC deux angles au centre; transportons le premier en AOB à la suite du second, de manière à former (9) un angle AOC qui soit la somme des deux angles proposés. L'arc ABC sera évidemment (89) la somme des deux arcs AB et BC, et comme les arcs AB et A′B′ sont égaux, puisqu'ils correspondent à des angles au centre égaux, l'arc ABC sera la somme des arcs A′B′ et BC.

THÉORÈME.

124. *L'angle au centre d'un cercle est proportionnel à l'arc correspondant;* en d'autres termes, *dans le même cercle ou dans des cercles égaux, le rapport* $\frac{a}{a'}$ *de deux angles au centre est égal au rapport* $\frac{b}{b'}$ *des arcs qu'ils interceptent.*

En effet, supposons que le rapport $\frac{a}{a'}$ des deux angles soit $\frac{3}{5}$, c'est-à-dire que l'angle a soit les $\frac{3}{5}$ de l'angle a'. En désignant par α le cinquième de l'angle a', on aura alors

$$a = 3\alpha \quad \text{et} \quad a' = 5\alpha.$$

Mais, si l'on appelle 6 l'arc intercepté par l'angle α, aux angles au centre

$$\alpha+\alpha \text{ ou } 2\alpha, \quad 2\alpha+\alpha \text{ ou } 3\alpha, \quad 3\alpha+\alpha \text{ ou } 4\alpha, \quad 4\alpha+\alpha \text{ ou } 5\alpha,$$

correspondront respectivement (123, 2°) les arcs

$$6+6 \text{ ou } 26, \quad 26+6 \text{ ou } 36, \quad 36+6 \text{ ou } 46, \quad 46+6 \text{ ou } 56.$$

Or, par hypothèse, les arcs qui correspondent aux angles au

centre 3α ou a et 5α ou a' sont b et b' ; on aura donc

$$b = 3\beta \quad \text{et} \quad b' = 5\beta,$$

d'où (120)

$$\frac{b}{b'} = \frac{3}{5} = \frac{a}{a'}.$$

SCOLIE.

125. Le raisonnement qui précède ne s'applique pas seulement aux angles au centre et aux arcs qu'ils interceptent. Il permet de démontrer d'une manière générale le théorème suivant :

Deux grandeurs sont proportionnelles l'une à l'autre si, à deux valeurs quelconques, mais égales, de la première grandeur, répondent deux valeurs égales de la seconde; et si, de plus, à la somme de deux valeurs quelconques de la première répond une valeur qui soit la somme des deux valeurs correspondantes de la seconde.

En effet, soient a et a' deux valeurs quelconques de la première grandeur, et b et b' les deux valeurs correspondantes de la seconde. Supposons que le rapport $\frac{a}{a'}$ soit, par exemple, $\frac{3}{5}$, c'est-à-dire que a soit les $\frac{3}{5}$ de a'. En désignant par α le cinquième de a', on aura alors

$$a = 3\alpha \quad \text{et} \quad a' = 5\alpha.$$

Mais, si l'on appelle β la valeur de la seconde grandeur qui répond à la valeur α de la première, aux valeurs

$$\alpha + \alpha \text{ ou } 2\alpha, \quad 2\alpha + \alpha \text{ ou } 3\alpha, \quad 3\alpha + \alpha \text{ ou } 4\alpha, \quad 4\alpha + \alpha \text{ ou } 5\alpha,$$

de la première grandeur, répondent respectivement, en vertu de la loi de correspondance admise, les valeurs

$$\beta + \beta \text{ ou } 2\beta, \quad 2\beta + \beta \text{ ou } 3\beta, \quad 3\beta + \beta \text{ ou } 4\beta, \quad 4\beta + \beta \text{ ou } 5\beta,$$

de la seconde grandeur. Or, par hypothèse, les valeurs de la seconde grandeur qui répondent aux valeurs 3α ou a et 5α ou a' de la première sont b et b'; on aura donc

$$b = 3\beta, \quad b' = 5\beta,$$

d'où

$$\frac{b}{b'} = \frac{3}{5} = \frac{a}{a'}.$$

RÉCIPROQUEMENT, *si deux grandeurs sont proportionnelles :* 1° la relation

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

montre que pour $a = a'$ on a $b = b'$, c'est-à-dire qu'*à des valeurs égales de la première grandeur correspondent des valeurs égales de la seconde*; 2° la même relation donne

$$\frac{a + a'}{a'} = \frac{b + b'}{b'},$$

c'est-à-dire qu'*à la somme de deux valeurs quelconques de la première grandeur correspond la somme des deux valeurs correspondantes de la seconde.*

Ainsi, *correspondance dans l'égalité et correspondance dans la somme*, telles sont les deux conditions nécessaires et suffisantes de la proportionnalité de deux grandeurs. Si l'une des deux conditions est seule remplie, *il n'y a pas proportionnalité*; c'est ce qui arrive pour un arc et sa corde : à des arcs égaux d'un même cercle correspondent des cordes égales (95); mais la corde BC de la somme de deux arcs (*fig.* 82) est moindre (27) que la somme AB + AC des cordes de ces arcs.

THÉORÈME.

126. *Tout angle a la même mesure que l'arc qu'il intercepte sur une circonférence décrite de son sommet comme centre, avec un rayon quelconque, pourvu que l'on prenne pour unité d'angle l'angle au centre qui intercepte sur cette circonférence l'arc choisi pour unité d'arc.*

En effet, soient (*fig.* 82) AOB l'angle à mesurer et AB l'arc qu'il intercepte sur la circonférence de rayon arbitraire OA; AC étant l'unité d'arc, l'angle correspondant AOC sera, par hypothèse, l'unité d'angle. On a (124),

$$\frac{\text{AOB}}{\text{AOC}} = \frac{\text{arc AB}}{\text{arc AC}}.$$

Or le premier rapport est égal au nombre qui mesure l'angle AOB (119), et le second est égal au nombre qui mesure

Fig. 82.

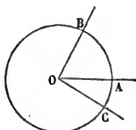
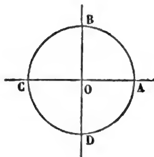


Fig. 83.



l'arc AB. Donc, dans le système d'unités adopté, le nombre qui mesure l'angle AOB est le même que celui qui mesure l'arc AB.

Comme ce théorème est d'un usage très-fréquent, on préfère l'énoncer d'une manière plus rapide, quoique incorrecte. D'abord on sous-entend la condition relative à la correspondance des unités; puis on dit *a pour mesure*, au lieu de *a la même mesure que;* et l'on arrive ainsi à cet énoncé usuel : *tout angle au centre a pour mesure l'arc compris entre ses côtés.*

SCOLIE.

127. Lorsqu'on prend l'angle droit pour unité, l'arc unité est alors le quart de la circonférence ou *le quadrant;* car, si l'angle au centre AOB est droit (*fig.* 83), les quatre angles AOB, BOC, COD, DOA, formés par les deux diamètres BOD, AOC, sont droits, et par suite égaux; les quatre arcs AB, BC, CD, DA, sont donc égaux entre eux, et chacun d'eux est le quart de la circonférence.

THÉORÈME.

128. *Tout angle inscrit dans un cercle a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Soit BAC un angle inscrit dans un cercle O. Pour démontrer que cet angle a pour mesure la moitié de l'arc BC compris entre ses côtés, il convient de distinguer trois cas :

1° Le centre O tombe sur l'un des côtés AC de l'angle BAC (*fig.* 84). Menons le rayon BO; le triangle BOA étant isocèle, les angles A et B sont égaux, et comme (74) leur somme équi-

vaut à l'angle extérieur BOC, l'angle A est égal à la moitié de BOC; mais ce dernier angle, ayant son sommet au centre du

Fig. 84.

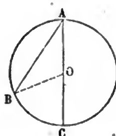


Fig. 85.

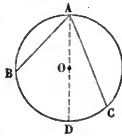
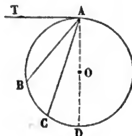


Fig. 86.



cercle, a pour mesure l'arc BC. Donc l'angle proposé BAC a pour mesure la moitié de l'arc BC.

2° Le centre O tombe à l'intérieur de l'angle BAC (*fig.* 85). Menons le diamètre AOD; l'angle BAC est la somme des angles BAD, DAC, qui, d'après le premier cas, ont respectivement pour mesure $\frac{1}{2}$ BD et $\frac{1}{2}$ DC. La somme de ces deux arcs, c'est-à-dire la moitié de l'arc BDC, est donc la mesure de l'angle BAC.

3° Le centre O tombe en dehors de l'angle BAC (*fig.* 86). Menons le diamètre AOD; l'angle BAC est la différence des angles BAD, CAD, qui, d'après le premier cas, ont respectivement pour mesure $\frac{1}{2}$ BD et $\frac{1}{2}$ CD; la différence de ces arcs, c'est-à-dire la moitié de l'arc BC, est donc la mesure de l'angle proposé BAC.

Corollaires.

129. Supposons (*fig.* 86) que le côté AC restant fixe, la corde AB tourne autour du sommet A de manière à devenir la tangente AT au point A; dans toutes les positions de la corde AB, l'angle inscrit BAC aura pour mesure la moitié de l'arc correspondant BC; donc, à la limite, *l'angle* TAC, *formé par une tangente* AT *et une corde* AC *issue du point de contact, a pour mesure la moitié de l'arc* AC *compris entre ses côtés.*

On peut d'ailleurs démontrer ce théorème*, indépendamment de toute notion de limite. Il suffit, par exemple, d'observer que l'angle TAC est l'excès de l'angle droit TAD sur l'angle inscrit CAD; sa mesure est donc l'excès de la moitié de la demi-circonférence ABD sur la moitié de l'arc CD, ou enfin la moitié de l'arc AC.

130. On appelle *segment* la portion de cercle comprise entre un arc et sa corde. A chaque corde AB correspondent deux segments ACB, AMB (*fig.* 87). On dit qu'*un angle est inscrit dans un segment* lorsque son sommet est situé sur l'arc du segment et que ses côtés passent par les extrémités de la corde sous-tendante. Ainsi les angles ACB, AEB, sont inscrits dans le segment ACB, et l'angle AMB est inscrit dans le segment AMB.

Tous les angles inscrits dans un même segment sont égaux; ainsi, les angles ACB, AEB, sont égaux comme ayant l'un et l'autre la moitié de l'arc AMB pour mesure.

Tout angle inscrit dans l'un des deux segments déterminés par une même corde est le supplément d'un angle quelconque inscrit dans l'autre segment. Ainsi les angles ACB, AMB, sont supplémentaires, car leurs mesures $\frac{1}{2}$ arc AMB et $\frac{1}{2}$ arc ACB forment en somme la moitié de la circonférence.

Tout angle inscrit dans un segment est aigu, droit ou obtus, suivant que ce segment est supérieur, égal ou inférieur à un demi-cercle; car l'arc compris entre les côtés de l'angle est alors inférieur, égal ou supérieur à une demi-circonférence.

On dit qu'*un segment de cercle est capable d'un angle donné*, lorsque les angles inscrits dans ce segment sont égaux à l'angle considéré; ainsi *le segment capable d'un angle droit est un demi-cercle*.

Fig. 87.

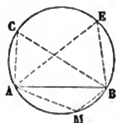


Fig. 88.

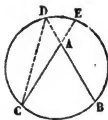
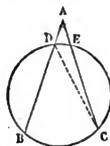


Fig. 89.



THÉORÈME.

131. *Tout angle* BAC, *formé par deux sécantes qui se rencontrent à l'intérieur du cercle, a pour mesure la demi-somme des arcs* BC *et* DE *compris entre ses côtés et entre ses côtés prolongés* (*fig.* 88).

En effet, en menant DC, on voit que l'angle BAC, exté-

rieur au triangle ACD, est égal (74) à la somme des angles inscrits ADC, ACD, qui ont respectivement pour mesure $\frac{1}{2}$ BC et $\frac{1}{2}$ DE.

THÉORÈME.

132. *Tout angle* BAC, *formé par deux sécantes qui se rencontrent hors du cercle, a pour mesure la demi-différence de l'arc concave* BC *et de l'arc convexe* DE *compris entre ses côtés* (*fig.* 89).

En effet, en menant DC, on voit que l'angle BDC, extérieur au triangle DAC, est la somme des angles A et C; par suite, l'angle A est l'excès de l'angle BDC sur l'angle C; sa mesure est donc l'excès de $\frac{1}{2}$ BC sur $\frac{1}{2}$ DE, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$ (BC — DE).

En faisant tourner autour du sommet A l'un des côtés, ou même les deux côtés de l'angle, jusqu'à ce qu'ils deviennent tangents à la circonférence, on voit que le théorème subsiste pour l'angle formé par une tangente et une sécante qui se coupent hors du cercle, et pour l'angle de deux tangentes.

SCOLIE.

133. *Dans la portion de plan située au-dessus d'une droite* BC, *le lieu des points d'où l'on voit cette droite sous un angle donné est un arc de cercle passant par les extrémités* B *et* C *de cette droite* (*fig.* 90).

En effet, soient A un point du lieu et BMACN la circonférence déterminée par les trois points A, B, C. 1° De tout point M de l'arc BMAC, on voit la droite BC sous un angle égal à BAC (130); 2° de tout point I pris à l'intérieur du segment BMAC, on voit la droite BC sous un angle BIC plus grand que BAC, puisque (131) sa mesure excède la moitié de l'arc BNC; 3° de tout point E extérieur au segment BMAC et situé au-dessus de la droite BC, on voit cette droite sous un angle BEC moindre que BAC, puisque sa mesure est plus petite que la moitié de l'arc BNC (132). L'arc BMAC est donc le lieu cherché.

Il résulte de là que l'arc BA'C, sur lequel s'applique l'arc BMAC lorsqu'on replie la figure autour de BC, est, au-dessous de BC, le lieu des points d'où l'on voit la droite BC sous l'angle donné.

Donc enfin, *le lieu des points d'où l'on voit une droite* BC *sous un angle donné se compose de deux arcs de cercle égaux entre eux et passant par les extrémités* B *et* C *de cette droite.*

Fig. 90.

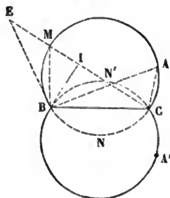
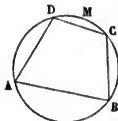


Fig. 91.



Remarquons, en outre, que l'ensemble des arcs BNC, BN'C, représente le lieu des points d'où l'on voit la droite BC sous un angle supplémentaire de l'angle considéré (130).

Si l'angle considéré est droit, les deux arcs BAC, BA'C, sont des demi-circonférences décrites sur BC comme diamètre. Donc, *le lieu des points d'où l'on voit une droite sous un angle droit est le cercle décrit sur cette droite comme diamètre.*

THÉORÈME.

134. *Dans tout quadrilatère convexe inscrit dans un cercle, les angles opposés sont supplémentaires.*

En effet (*fig.* 91), considérons par exemple les angles opposés, B et D. La corde AC détermine deux segments ADC, ABC, et nous avons vu (130) que tout angle D inscrit dans le segment supérieur est le supplément de tout angle B inscrit dans le segment inférieur.

Réciproquement, *si, dans un quadrilatère convexe* ABCD (*fig.* 91), *deux angles opposés* B *et* D *sont supplémentaires, le quadrilatère est inscriptible;* en d'autres termes, la circonférence déterminée par les trois points A, B, C, passera par le quatrième sommet D.

En effet, le sommet D est un point situé au-dessus de AC, et d'où l'on voit la corde AC sous un angle supplémentaire de l'angle B ; or l'arc AMC est le lieu des points du plan qui jouissent de cette propriété (133).

EXERCICES.

1. A, B, C, étant trois points quelconques d'une circonférence, D le milieu de l'arc AB, et E le milieu de l'arc AC, la droite DE coupe respectivement en F et en G les cordes AB et AC. Démontrer que AF = AG.

2. A étant un point quelconque d'un diamètre, B l'extrémité du rayon perpendiculaire à ce diamètre, on mène BA qui coupe le cercle en P, puis la tangente au point P qui coupe en C le diamètre prolongé. Démontrer que CA = CP.

3. Les hauteurs AA', BB', CC', d'un triangle quelconque ABC, sont les bissectrices des angles du triangle A'B'C'.

4. ABC étant un triangle inscrit dans un cercle, on joint le centre O au milieu D de l'arc BC, et l'on mène AD. Démontrer que l'angle ADO est la moitié de la différence des angles B et C.

5. Si par le point A, commun à deux circonférences qui se coupent, on mène à volonté deux sécantes ABC, ADE, les cordes BD et CE qui joignent leurs extrémités se rencontrent sous un angle constant. — Dans le cas où les deux sécantes se confondent, comment faut-il énoncer le théorème?

6. Si, par le point d'intersection O des diagonales d'un quadrilatère inscrit ABCD, on mène la corde EOF qui a son milieu en O, la partie de cette corde interceptée entre les côtés opposés du quadrilatère sera aussi divisée par le point O en deux parties égales.

7. Si par le point A, milieu d'un arc BAC d'une circonférence, on mène deux cordes quelconques AD et AE qui coupent en F et en G la corde BC, le quadrilatère DFGE est inscriptible.

8. Sur les trois côtés d'un triangle ABC, on construit extérieurement à ce triangle les triangles équilatéraux ABC', ACB', BCA'. Démontrer : 1° que les trois droites AA', BB', CC', sont égales; 2° qu'elles concourent en un même point O; 3° que du point O, on voit sous le même angle les trois côtés du triangle ABC.

9. Par un point fixe pris dans le plan d'un cercle, on mène diverses cordes : trouver le lieu des milieux de ces cordes.

10. Par l'une des extrémités d'un diamètre AB d'un cercle, on mène une corde quelconque AC que l'on prolonge d'une quantité CM égale à CB : quel est le lieu des points M?

11. ABC étant un triangle équilatéral, quel est le lieu des points M, tels que MA = MB + MC?

12. Trouver le lieu des points tels, que si l'on abaisse de l'un d'eux des perpendiculaires sur les trois côtés d'un triangle fixe, les trois pieds de ces perpendiculaires soient en ligne droite.

13. Le trapèze isocèle est le seul trapèze inscriptible.

§ IV.

PROGRAMME OFFICIEL : *Usage de la règle et du compas.—Commune mesure de deux droites. — Problèmes élémentaires sur la construction des angles et des triangles. — Rapporteur. — Évaluation des angles en degrés, minutes et secondes.*

135. Les deux principaux instruments employés dans la construction graphique des figures sont la *règle* et le *compas*. Chacun sait comment on trace des lignes droites avec la règle et des circonférences avec le compas.

Avant de se servir d'une règle, il importe de la vérifier. A

Fig. 92.



cet effet (*fig.* 92), on mène une ligne ACB d'une extrémité à l'autre de la règle, en faisant glisser la pointe du crayon le long de l'un des bords. Puis on retourne la règle, comme le montre la figure, et l'on fait glisser de nouveau le crayon le long du même bord, de manière à tracer la nouvelle ligne AC'B. Suivant que les deux lignes ACB, AC'B, coïncident exactement ou se séparent, le bord considéré est rectiligne ou curviligne; en d'autres termes, la règle est juste ou fausse. L'épaisseur de la règle ne doit pas dépasser 3 millimètres.

Un bon compas doit avoir ses pointes fines et parfaitement égales ; il doit s'ouvrir et se fermer sans trop de facilité, comme sans secousses. Pour éviter de trop grands trous formés par les pointes, il convient de fixer le papier sur une planchette en collant simplement les quatre angles.

On fait d'abord tout le dessin au crayon ; on exécute ensuite la *mise à l'encre* à l'aide d'un *tire-ligne* à branches égales et que l'on tient perpendiculairement au plan du papier. Les *données* et les *résultats* sont représentés par un trait *plein* ou continu ; on représente par un trait *pointillé* ou interrompu les *lignes de construction*, c'est-à-dire les lignes qui servent à déduire les résultats des données.

Enfin le papier doit être assez épais, avoir le grain fin et

être fabriqué *à la forme*, le papier *à la mécanique* ne résistant pas à l'action de la gomme élastique.

136. En pratique, lorsqu'on détermine une droite par deux points, il convient que ces deux points ne soient pas trop voisins l'un de l'autre ; sans cela, la moindre erreur sur la position de l'un d'eux entraînerait une erreur notable sur la direction de la droite.

De même, quand un point est déterminé par la rencontre de deux droites, il faut que ces droites ne se coupent pas sous un angle trop petit ; sans cela l'épaisseur inévitable des deux traits laisserait dans l'incertitude sur la véritable position du point de rencontre.

THÉORÈME.

137. *Trouver la plus grande commune mesure de deux lignes droites.*

Soient A et B deux droites *commensurables entre elles* (116), B étant la plus petite. La recherche de leur plus grande commune mesure repose sur les deux principes suivants :

1° *Si* B *est une partie aliquote de* A, B *est évidemment la plus grande commune mesure de* A *et de* B ;

2° *Si* A *contient m fois* B, *plus un reste* R *moindre que* B, *la plus grande commune mesure de* A *et de* B *est la même que celle de* B *et de* R. On a, en effet,

$$A = mB + R;$$

or, toute commune mesure de A et de B étant une partie aliquote de B l'est aussi de mB, et, par suite, de $A - mB$ ou de R. Inversement, toute commune mesure de B et de R étant une partie aliquote de B l'est aussi de mB, et, par suite, de $mB + R$ ou de A. Donc les communes mesures de A et de B sont les mêmes que celles de B et de R, et, en particulier, la plus grande commune mesure est la même de part et d'autre.

D'après cela, on portera B sur A autant de fois que possible ; s'il n'y a pas de reste, B sera la plus grande commune mesure demandée ; s'il y a un reste R, on sera ramené à chercher la plus grande commune mesure de B et de R. On portera donc

R sur B autant de fois que possible ; s'il n'y a pas de reste, R sera la plus grande commune mesure demandée ; s'il y a un reste R′, on sera ramené à chercher la plus grande commune mesure de R et de R′.

Il est aisé de prouver qu'en continuant de la sorte on arrivera à un reste qui sera une partie aliquote du précédent. En effet, dans toute division, le dividende est au moins égal à la somme du diviseur et du reste ; le reste est d'ailleurs moindre que le diviseur ; donc le reste est inférieur à la moitié du dividende. On voit par là que, dans la recherche de la plus grande commune mesure de A et de B, le premier reste sera inférieur à $\frac{A}{2}$; le troisième reste sera moindre que la moitié du premier, et, par suite, inférieur à $\frac{A}{4}$; le cinquième reste sera moindre que la moitié du troisième et, par suite, inférieur à $\frac{A}{8}$; et ainsi de suite. L'opération ne pourra donc pas se prolonger indéfiniment, car on tomberait sur un reste moindre que la plus grande commune mesure supposée ; ce qui est absurde, puisque, d'après la théorie précédente, la plus grande commune mesure doit diviser exactement les restes successifs.

On arrivera donc à un reste qui sera une partie aliquote du précédent, et ce reste sera la plus grande commune mesure demandée.

138. Réciproquement, si, en appliquant le procédé qu'on vient d'indiquer à deux droites données, on arrive à un reste qui soit contenu un nombre exact de fois dans celui qui le précède, les deux droites considérées seront commensurables entre elles, et ce reste sera alors leur plus grande commune mesure.

Ainsi, supposons qu'on ait trouvé successivement

$$A = B + R, \quad B = 5R + R', \quad R = 2R' + R'', \quad R' = 3R'';$$

on aura

$$R = 7R'', \quad B = 38R'', \quad A = 45R'',$$

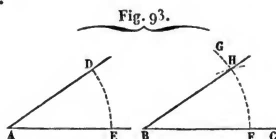
et le rapport des deux droites A et B sera représenté par le

nombre fractionnaire $\frac{45}{38}$. D'ailleurs, R″ étant la plus grande commune mesure de R′ et de R″ sera, d'après ce qui précède, la plus grande commune mesure de A et de B.

PROBLÈME.

139. *Par un point* B *d'une droite* BC, *mener une seconde droite qui fasse avec la première un angle égal à un angle donné* (*fig.* 93).

Fig. 93.



Du point A comme centre, avec une ouverture de compas arbitraire, mais assez grande, décrivez un arc de cercle qui coupe en D et E les côtés de l'angle donné : avec la même ouverture, et du point B comme centre, décrivez un second arc de cercle GF, qui coupe en F la droite BC. Prenez avec le compas la longueur de la corde DE (il est inutile pour cela de tracer cette corde), et du point F comme centre, avec cette ouverture, décrivez un arc de cercle qui coupe en H l'arc GF; la droite BH sera la droite demandée.

En effet, les arcs HF et DE ayant des rayons égaux et des cordes égales sont égaux (96); par suite, les angles au centre HBF, DAE, qui correspondent à ces arcs, sont aussi égaux (124).

140. On divise la circonférence en 360 parties égales qu'on nomme *degrés*, le degré en 60 parties égales appelées *minutes*, et la minute en 60 parties égales appelées *secondes*. D'après cela, la circonférence contient $360.60 = 21600$ minutes, ou $21600.60 = 1296000$ secondes; la demi-circonférence contient 180 degrés, ou 10800 minutes, ou 648000 secondes; enfin le quadrant vaut 90 degrés, ou 5400 minutes, ou 324000 secondes.

On évalue un arc quelconque en degrés, minutes et secondes de la circonférence. Ainsi l'on dit : un arc de 36 degrés 15 minutes 21 secondes, que l'on écrit : arc de $36^{\circ}\,15'\,21''$.

Deux arcs AB et A'B' (*fig.* 94) décrits entre les côtés d'un même angle XOY, de son sommet comme centre, contiennent le même nombre de degrés, minutes et secondes. En effet, le

Fig. 94.

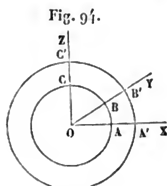
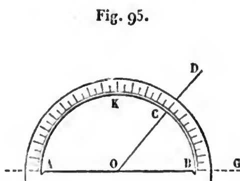


Fig. 95.



rapport de l'arc AB au quadrant AC est le même que le rapport de l'arc A'B' au quadrant A'C', puisque chacun de ses rapports est égal à celui de l'angle XOY à l'angle droit XOZ (124). Or, comme le quadrant AC vaut 90 degrés de la circonférence OA, et que le quadrant A'C' vaut 90 degrés de la circonférence OA', les arcs AB et A'B' vaudront le même nombre de degrés, minutes et secondes de leurs circonférences respectives.

D'après cela, on appelle angle de 36° 15'21" l'angle qui intercepte entre ses côtés, sur toute circonférence décrite de son sommet comme centre, un arc de 36° 15'21".

Connaissant le nombre de degrés, minutes et secondes d'un angle, on obtient son rapport à l'angle droit en prenant le rapport de ce nombre de degrés, minutes et secondes à 90 degrés; il faut avoir soin, bien entendu, d'évaluer les deux angles en unités de même espèce, soit en degrés, soit en minutes, soit en secondes. Ainsi, comme 36° 15'21" valent 130521 secondes, et que 90 degrés renferment 324 000 secondes, le rapport de l'angle de 36° 15'21" à l'angle droit est exprimé par la fraction

$$\frac{130521}{324000} \text{ ou } \frac{43507}{108000}.$$

141. Pour évaluer le nombre de degrés d'un angle, ou pour tracer un angle ayant un nombre de degrés donné, on emploie un instrument appelé *rapporteur*. C'est un demi-cercle en corne ou en cuivre dont le bord circulaire ou *limbe* est divisé en 180 parties égales ou degrés; les rapporteurs qui ont un décimètre de rayon sont même divisés en demi-degrés.

Le centre est marqué par un petit trou ou par une petite échancrure.

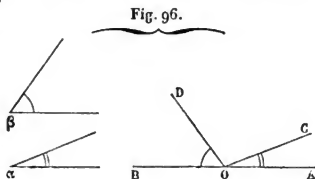
Pour mesurer un angle DOG (*fig.* 95), on place l'instrument de manière que son centre coïncide avec le sommet de l'angle, et que le diamètre AB, qui va de zéro à 180 degrés, s'applique sur l'un des côtés OG. On lit alors le nombre de degrés de l'angle au point où le limbe est traversé par le second côté OD.

Pour mener au point O d'une droite OG une seconde droite OD, formant avec la première un angle donné, de 49 degrés par exemple, on place l'instrument de manière que son centre soit en O, et que son diamètre AB coïncide avec OG; puis on marque le point C du papier sur lequel tombe la division 49 du limbe; et, après avoir enlevé le rapporteur, on tire la droite OC.

PROBLÈME.

142. *Connaissant deux angles α et β d'un triangle, construire le troisième γ.*

Fig. 96.



Tracez une droite indéfinie AB (*fig.* 96); par l'un de ses points O, menez une droite OC qui forme avec OA un angle COA égal à α; menez par le même point O une autre droite OD qui fasse avec OB un angle DOB égal à β. L'angle COD sera l'angle cherché; car la somme des trois angles formés autour du point O et au-dessus de AB équivaut à deux angles droits (20, 73).

SCOLIE.

143. Nous allons apprendre à construire un triangle, connaissant : 1° un côté et deux angles; 2° deux côtés et l'angle compris; 3° deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux; 4° les trois côtés. Dans ces quatre problèmes, nous désignerons les

trois côtés par *a*, *b*, *c*, et les angles respectivement opposés par A, B, C; ainsi l'angle A sera opposé au côté *a*, l'angle B au côté *b*, l'angle C au côté *c*.

PROBLÈME.

144. *Construire un triangle, connaissant un côté a et deux angles.*

On peut donner les deux angles B et C adjacents au côté *a*, ou bien l'angle opposé A et l'un des angles adjacents; on ramène ce dernier cas au premier en commençant par chercher le troisième angle (142).

Supposons donc connus le côté *a* et les deux angles adjacents B et C.

Après avoir tracé une droite BC (*fig.* 97) égale à *a*, menez au point B une droite BA formant avec BC et au-dessus de cette ligne un angle ABC égal à l'angle donné B; menez de même au point C une droite CA formant avec CB, et au-dessus de cette ligne, un angle ACB égal à l'angle donné C. Le point de rencontre A de ces deux droites sera le troisième sommet du triangle cherché.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les deux droites BA, CA, se coupent, c'est-à-dire (65) que la somme des deux angles B et C soit moindre que deux angles droits.

Fig. 97.

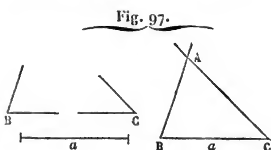
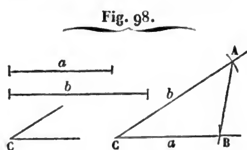


Fig. 98.



PROBLÈME.

145. *Construire un triangle, connaissant deux côtés a et b et l'angle compris* C.

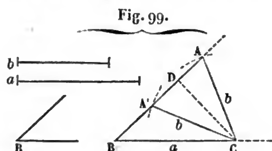
Tracez une droite CB (*fig.* 98) égale à *a*; au point C, menez une droite CA formant avec la première un angle ACB égal à l'angle donné C; puis prenez sur cette droite, à partir du point C, une longueur CA égale à *b*; enfin, tirez AB, et vous aurez le triangle cherché.

PROBLÈME.

146. *Construire un triangle, connaissant deux côtés a et b et l'angle* B *opposé à l'un d'eux.*

Tracez une droite BC (*fig.* 99) égale à *a*, et au point B me-

Fig. 99.



nez une droite BA formant avec la première un angle ABC égal à l'angle donné B; puis, du point C comme centre, avec une ouverture de compas égale à *b*, décrivez un arc de cercle. Si A est un point d'intersection du côté BA et de cet arc de cercle, il suffira de tirer AC pour avoir un triangle ABC satisfaisant aux conditions exigées.

147. *Discutons* maintenant ce problème, c'est-à-dire cherchons les conditions que doivent remplir les données pour que le problème soit possible, et, dans ce cas, les diverses solutions qui peuvent exister.

1° *L'angle* B *étant aigu* (*fig.* 99), pour que le problème soit possible, il faut que l'arc de cercle rencontre le côté BA, c'est-à-dire que le côté *b* soit au moins égal à la perpendiculaire CD abaissée du point C sur BA.

Si le côté *b* est égal à cette perpendiculaire CD, le cercle touche BA en D, et il n'y a qu'une solution : c'est le triangle rectangle BCD.

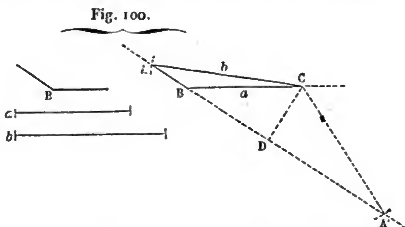
Si le côté *b* est compris entre la longueur de la perpendiculaire CD et celle du côté *a*, le cercle coupe la droite BA en deux points A et A′ situés au-dessus de B, et de part et d'autre de D; il y a donc deux solutions distinctes : ce sont les triangles ABC, A′BC.

Enfin, si le côté *b* est plus grand que *a*, le point A′ passe au-dessous de B, et le triangle correspondant doit être rejeté puisque son angle en B n'est plus l'angle donné, mais son supplément; il n'y a donc qu'une solution : c'est le triangle ABC.

6.

2° *L'angle* B *étant obtus* (*fig.* 100), la perpendiculaire CD ne tombe plus dans l'angle B, mais dans son supplément (42);

Fig. 100.



et, pour que le problème soit possible, c'est-à-dire pour que l'arc de cercle coupe la droite BA au-dessus de B, il faut que le côté b soit plus grand que a : ce que l'on pouvait prévoir, car dans tout triangle au plus grand angle doit être opposé le plus grand côté. D'ailleurs, lorsque cette condition est remplie, les deux points d'intersection A et A' sont de part et d'autre de B; le triangle A'BC doit être rejeté, car son angle en B est le supplément de l'angle donné, et il n'y a qu'une solution : c'est le triangle ABC.

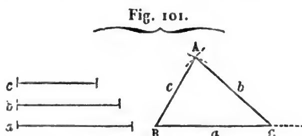
3° *L'angle* B *étant droit*, le problème est impossible si b est inférieur ou égal à a; il admet une solution unique si b est supérieur à a.

PROBLÈME.

148. *Construire un triangle, connaissant les trois côtés* a, b, c.

Tracez (*fig.* 101) une droite BC égale à a, c'est-à-dire au plus grand des côtés donnés. Du point C comme centre, avec une ouverture de compas égale à b, décrivez, au-dessus de BC, un arc de cercle; du point B comme centre, avec une ouverture

Fig. 101.



de compas égale à c, décrivez au-dessus de BC un autre arc de

cercle. En joignant aux points B et C le point d'intersection A de ces deux arcs, vous aurez le triangle demandé ABC.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les deux arcs de cercle se coupent, c'est-à-dire (115) que le plus grand côté a, qui est la distance des centres, soit moindre que la somme et plus grand que la différence des deux autres côtés b et c qui sont les rayons. Ce résultat est conforme au scolie du nº 29.

EXERCICES.

1. Décrire, avec un rayon donné, un cercle passant par deux points donnés.

2. Décrire, avec un rayon donné, un cercle passant par un point donné et ayant son centre sur une droite donnée ou sur une circonférence donnée.

3. Construire un parallélogramme, connaissant :
1° Deux côtés adjacents et une diagonale;
2° Un côté et les deux diagonales;
3° Les deux diagonales et leur angle;
4° Le périmètre, un côté et un angle.

4. Construire un triangle, connaissant :
1° Deux côtés et une médiane (deux cas);
2° Un côté et deux médianes (deux cas);
3° Les trois médianes;
4° La base, la différence des deux autres côtés et la différence des angles à la base;
5° La base, un angle à la base, et la somme ou la différence des deux autres côtés;
6° La base, l'angle au sommet, et la somme ou la différence des deux autres côtés.

5. Diviser un angle droit en trois parties égales.

6. Par un point donné O, mener trois droites OA, OB, OC, de longueurs données et telles, que leurs extrémités A, B, C, soient en ligne droite, et que les intervalles AB et BC soient égaux entre eux.

7. Soient ABC un triangle, et ABDE, ACFG, BCHK, les carrés construits sur les trois côtés; connaissant les longueurs des trois droites EG, FH, KD, construire le triangle ABC.

§ V.

Programme officiel : *Tracé des perpendiculaires et des parallèles. — Équerre.*

PROBLÈME.

149. *Par un point donné* A, *pris hors d'une droite* BC, *mener une parallèle à cette droite* (*fig.* 102).

Fig. 102.



La droite BC et la parallèle cherchée AD doivent faire (64), avec une sécante quelconque AC issue du point A, deux angles alternes-internes DAC, ACB, égaux entre eux. De cette considération et de la solution du problème du n° 139 résulte la construction suivante :

Du point A comme centre, avec une ouverture de compas arbitraire, mais assez grande, décrivez un arc de cercle DC; du point C, avec la même ouverture, décrivez un second arc de cercle AB, qui passera nécessairement par A. Prenez avec le compas la longueur de la corde AB, et du point C comme centre, avec cette ouverture, décrivez un arc de cercle qui coupe en D l'arc DC. En tirant AD, vous aurez la parallèle demandée.

Il est clair, en effet, qu'on a construit de cette façon un angle DAC égal à ACB. Il est inutile de tracer la droite AC, qui ne sert que dans la démonstration.

150. Dans la pratique, on résout presque toujours ce problème à l'aide d'un instrument spécial qui porte le nom d'*équerre*. C'est une planchette en bois ayant la forme d'un triangle rectangle; elle est munie d'une petite ouverture circulaire ou *œil*, qui la rend plus facile à manier. Une bonne équerre doit avoir ses arêtes parfaitement rectilignes et une épaisseur de 2 millimètres au plus.

Pour vérifier une équerre BAC (*fig.* 103) on applique l'un des côtés de l'angle droit AB contre une règle bien exacte, et

l'on trace une droite au crayon le long du côté AC. Cela fait, on retourne l'équerre, comme l'indique la figure, et l'on trace

Fig. 103.

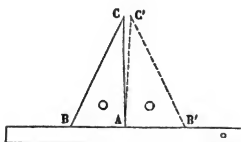
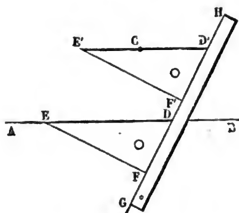


Fig. 104.



une nouvelle droite le long de AC'; selon que les deux droites ainsi obtenues coïncident ou divergent, l'angle BAC de l'équerre est droit ou non, en d'autres termes l'équerre est juste ou fausse.

Pour mener (*fig.* 104) à l'aide de l'équerre, par un point C, une parallèle à une droite AB, on place sur la droite AB l'hypoténuse de l'équerre. Puis on appuie la règle GH contre le petit côté DF de l'angle droit, et, en maintenant la règle immobile, on fait glisser l'équerre jusqu'à ce que l'arête, qui coïncidait d'abord avec AB, vienne passer par le point C; on trace alors le long de cette arête une droite E'D' qui est la parallèle demandée. En effet, les angles correspondants E'D'F', EDF, étant égaux, les droites E'D', ED, sont parallèles.

Cette méthode ne suppose pas que l'équerre ait l'un de ses angles droits. Il suffit que les arêtes soient bien dressées; cet avantage et la simplicité de l'opération expliquent la supériorité de ce procédé.

PROBLÈME.

151. *Mener une perpendiculaire sur une droite en son milieu.*

Soient (*fig.* 105) A et B deux points donnés; il s'agit de mener une perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint ces deux points.

La perpendiculaire sur le milieu d'une droite étant le lieu des points équidistants des extrémités de cette droite (47),

il suffit d'obtenir deux points qui soient chacun également distants de A et de B, puis de joindre ces deux points. De là cette construction.

Fig. 105.

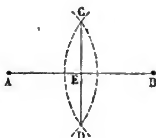


Fig. 106.

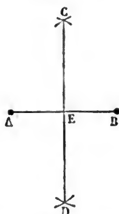
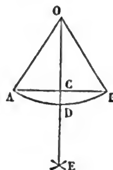


Fig. 107.



Du point A comme centre, avec un rayon sensiblement plus grand que la moitié de AB, décrivez une circonférence; du point B comme centre, avec la même ouverture, décrivez une seconde circonférence; ces deux circonférences se couperont, puisque, les deux rayons étant égaux et surpassant la moitié de AB, la distance AB des centres sera comprise entre la somme et la différence des rayons. Chacun des deux points d'intersection C et D sera équidistant de A et de B; et en tirant CD, vous aurez la perpendiculaire demandée.

Dans la pratique, on ne décrit pas les cercles complets; on se borne à tracer deux petits arcs de chacun d'eux, de part et d'autre de AB, dans la région où l'on prévoit que l'intersection doit avoir lieu (*fig.* 106). Ce procédé ne suppose pas que la droite AB soit tracée.

Ce problème renferme les deux suivants :

1° *Diviser une droite en deux parties égales;*

2° *Décrire un cercle sur une droite donnée pour diamètre.*

Cette dernière question se réduit en effet à la recherche du *milieu* de la droite, qui est le centre du cercle à décrire.

PROBLÈME.

152. *Diviser un arc de cercle ou un angle en deux parties égales* (*fig.* 107).

1° Soit AB l'arc proposé; on sait que la perpendiculaire

menée sur le milieu de la corde divise l'arc en deux parties égales (99); on appliquera donc la construction du n° 151. Si le centre O de l'arc est donné, il suffira de déterminer un seul point E équidistant de A et de B, et de mener OE.

2° Soit AOB l'angle proposé. Du point O comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrira un arc AB entre les côtés de l'angle, et la droite OE qui divisera cet arc en deux parties égales sera évidemment la bissectrice de l'angle AOB.

En appliquant ce procédé aux deux moitiés, aux quatre quarts, etc., de l'arc, on divisera l'arc et l'angle en 4, 8, etc., parties égales.

PROBLÈME.

153. *Décrire une circonférence qui passe par trois points donnés* A, B, C, *non situés en ligne droite* (*fig.* 73).

Le centre O devant se trouver (99) à l'intersection des perpendiculaires élevées, l'une sur le milieu de AB, l'autre sur le milieu de BC, il suffira, pour avoir ce centre, de répéter deux fois la construction du n° 151. Il est même inutile de tracer les droites AB et BC. Le centre O étant connu, on décrira la circonférence demandée à l'aide d'une ouverture de compas égale à l'une des trois droites égales OA, OB, OC.

Pour trouver le centre d'une circonférence déjà tracée, on prend à volonté trois points A, B, C, sur cette circonférence, et l'on applique la solution qui précède.

PROBLÈME.

154. *Mener par un point donné* C *une perpendiculaire sur une droite donnée* AB.

Il y a deux cas à distinguer :

1° Le point donné C est sur la droite AB (*fig.* 108). En prenant de part et d'autre de C deux longueurs égales CA et CB, sur la droite donnée, le problème est ramené à celui du n° 151. Seulement, ici, la droite AB est tracée, et l'on connaît son milieu, de sorte qu'il suffit de trouver un seul point D de la perpendiculaire. De là cette construction :

Avec une ouverture de compas arbitraire, mais assez grande, prenez sur la droite donnée, et à partir du point C, deux distances égales CA et CB. Ouvrez davantage le compas, et des

points A et B comme centres décrivez successivement, avec cette nouvelle ouverture, deux petits arcs de cercle au-dessus de AB. En joignant au point C le point D d'intersection de ces arcs, vous aurez la perpendiculaire cherchée.

Fig. 108.

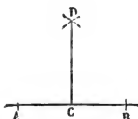


Fig. 109.

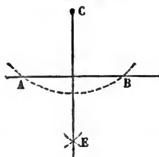
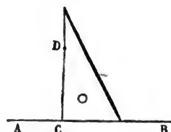


Fig. 110.



2° Le point C est hors de la droite AB (*fig.* 109). En traçant, du point C comme centre, un arc de cercle qui coupe la droite AB en deux points A et B, on est ramené au problème du n° **151**, avec cette différence qu'on connaît déjà un point C de la perpendiculaire et qu'il suffit d'en trouver un second. De là la construction suivante :

Du point C comme centre, avec un rayon assez grand, décrivez un arc de cercle qui coupe la droite donnée en deux points A et B. De ces points comme centres, avec une ouverture de compas sensiblement plus grande que la moitié de AB, décrivez successivement deux petits arcs de cercle au-dessous de AB. En joignant au point C le point E où ces arcs se coupent, vous aurez la perpendiculaire demandée.

155. En bonne construction, on ne doit jamais se servir *directement* de l'équerre pour le dessin des perpendiculaires. Toutefois, il est un cas très-fréquent dans la pratique où l'emploi, en quelque sorte *indirect,* de cet instrument fournit d'excellents résultats; c'est celui où l'on doit *mener sur une droite des perpendiculaires par plusieurs points.* On commence par tracer avec soin l'une de ces perpendiculaires à l'aide du compas, puis on lui mène à l'équerre des parallèles par les autres points. On opère de même lorsqu'on veut *élever une perpendiculaire à l'extrémité d'une droite qu'on ne peut pas prolonger;* on trace à l'équerre, par ce point extrême, une parallèle à une perpendiculaire que l'on a préalablement menée sur cette droite en un autre point à l'aide de la règle et du compas.

EXERCICES.

1. Décrire un cercle :

1° Passant par deux points donnés et ayant son centre sur une droite donnée ou sur une circonférence donnée;

2° Ayant un rayon donné, passant par un point donné et tangent à une droite donnée ou à une circonférence donnée;

3° Ayant un rayon donné, et touchant soit deux droites données, soit une droite et une circonférence données, soit deux circonférences données;

4° Ayant un rayon donné, son centre sur une droite ou une circonférence donnée, et tangent à une droite ou à une circonférence donnée;

5° Passant par un point donné et tangent à une droite ou à une circonférence donnée en un point donné;

6° Touchant deux droites données, et l'une d'elles en un point donné;

7° Touchant une droite et une circonférence données, et cette circonférence en un point donné.

2. Construire un triangle rectangle, connaissant : 1° l'hypoténuse et un côté de l'angle droit; 2° l'hypoténuse et un aigle aigu.

3. Construire un triangle isocèle, connaissant la base et l'angle au sommet.

4. Construire un rectangle, connaissant : 1° la diagonale et un côté; 2° un côté et l'angle des diagonales.

5. Construire un losange, connaissant : 1° les deux diagonales; 2° deux droites parallèles indéfinies sur lesquelles doivent être situés deux côtés opposés, et deux points par lesquels doivent passer les deux autres côtés.

6. Construire un carré, connaissant sa diagonale.

7. Construire un quadrilatère, connaissant les quatre côtés et la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés.

8. Par l'un des points d'intersection de deux cercles, mener une sécante commune qui ait son milieu en ce point.

9. Par un point donné, mener une droite qui fasse des angles égaux avec deux droites données.

10. Tracer une droite de longueur donnée, dont les extrémités s'appuient sur deux droites données, et qui soit parallèle à une droite donnée.

Même problème en remplaçant les deux droites par deux circonférences.

11. Trouver la bissectrice de l'angle de deux droites qu'on ne peut pas prolonger jusqu'à leur point d'intersection.

§ VI.

Programme officiel : *Mener une tangente à un cercle par un point extérieur. — Décrire sur une droite donnée un segment capable d'un angle donné.*

PROBLÈME.

156. *Mener par un point donné* A *une tangente à un cercle donné* O.

Il faut distinguer deux cas :

1° Le point A (*fig.* 111) est sur la circonférence. Il suffit

Fig. 111.

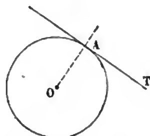
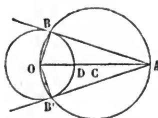


Fig. 112.



alors (103) d'élever par le point A une perpendiculaire AT sur le rayon OA.

2° Le point A est hors du cercle (*fig.* 112). Supposons le problème résolu; soient AB une tangente menée par A au cercle O, et B son point de contact. La tangente étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon, du point de contact B on voit la droite AO sous un angle droit OBA. Donc (133) le point B est situé sur la circonférence décrite sur AO comme diamètre; ce point étant d'ailleurs sur la circonférence donnée O, il est à l'intersection de ces deux circonférences, et l'on voit dès lors qu'il y a deux solutions.

Ainsi, on décrira sur AO comme diamètre une circonférence, et en joignant au point A les points B et B′ où cette circonférence rencontre la proposée, on aura les deux tangentes BA et B′A.

Corollaire.

157. *Les deux tangentes* AB *et* AB′ *que l'on peut mener à un cercle* O *par un point extérieur* A *sont égales entre elles,*

et la droite qui joint ce point extérieur au centre du cercle divise en deux parties égales l'angle BAB′ *des deux tangentes, ainsi que l'angle* BOB′ *des deux rayons* OB *et* OB′ *qui aboutissent aux points de contact.*

En effet, les deux triangles rectangles OBA, OB′A, sont égaux comme ayant l'hypoténuse AO commune et les côtés de l'angle droit OB et OB′ égaux entre eux comme rayons du cercle donné. On a donc

AB = AB′, angle BAO = angle B′AO, angle BOA = angle B′OA.

SCOLIE.

158. Pour mener à un cercle une tangente parallèle à une droite donnée, on mène le diamètre perpendiculaire à la droite donnée, et les extrémités de ce diamètre sont les points de contact des deux tangentes qui satisfont à la question.

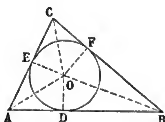
PROBLÈME.

159. *Inscrire un cercle dans un triangle donné* ABC.

On dit qu'un polygone est *circonscrit* à un cercle lorsque chacun de ses côtés est tangent à la circonférence; le cercle est alors *inscrit* dans le polygone.

Cela posé, soit ABC (*fig.* 113) le triangle proposé dans le-

Fig. 113.



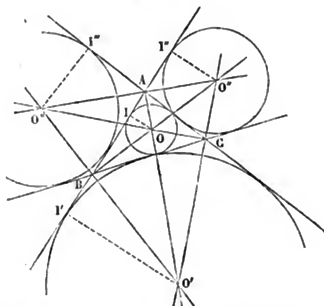
quel il faut inscrire un cercle. Supposons le problème résolu. La droite AO, qui joint le centre du cercle cherché au point de rencontre A des deux tangentes AD et AE, est, d'après le problème précédent, la bissectrice de l'angle A du triangle. On voit de même que le point O doit encore se trouver sur les bissectrices BO, CO, des angles B et C. D'après cela, on mènera deux de ces bissectrices, et de leur intersection O comme centre, avec une ouverture de compas égale à la longueur

commune des perpendiculaires OD, OE, OF, abaissées de ce point sur les côtés, on décrira une circonférence qui touchera en D, E, F, les côtés du triangle donné.

SCOLIE.

160. Il résulte de cette démonstration que les bissectrices des trois angles d'un triangle concourent en un même point. On voit d'une manière analogue que les bissectrices des angles extérieurs d'un triangle ABC (*fig.* 114) forment un second

Fig. 114.



triangle O′O″O‴ dont les sommets sont situés sur les bissectrices des angles intérieurs. Chacun de ces sommets est le centre d'un cercle ex-inscrit, c'est-à-dire d'un cercle tangent à l'un des côtés du triangle et aux prolongements des deux autres côtés. Il existe donc, en général, quatre circonférences tangentes à trois droites données.

PROBLÈME.

161. *Décrire sur une droite donnée* AB *un segment capable d'un angle donné.*

Supposons le problème résolu, et soit AFB (*fig.* 115) le segment cherché : la tangente BC au point B de ce segment fait avec la corde AB un angle ABC qui, comme tout angle AFB inscrit dans le segment, a (129) pour mesure la moitié de l'arc situé au-dessous de AB; cet angle est donc égal à l'angle donné. On peut par suite mener cette tangente BC indépen-

damment du cercle inconnu, en construisant au point B, au-dessous de AB, un angle ABC égal à l'angle donné. Dès lors,

Fig. 115.

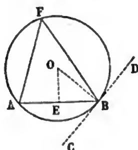
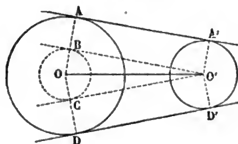


Fig. 116.



le centre du cercle cherché sera à l'intersection de la perpendiculaire OE, élevée sur le milieu de la corde AB, et de la perpendiculaire BO élevée en B sur la tangente BC; et l'on décrira ce cercle en plaçant l'une des pointes du compas en O et en donnant aux branches une ouverture égale à OB.

SCOLIE.

162. Lorsqu'on n'aperçoit pas immédiatement la solution d'un problème, on suppose ce problème résolu et la figure construite. L'examen attentif de cette figure révèle entre les données et les inconnues certaines dépendances qu'on s'empresse d'utiliser pour modifier l'énoncé de la question. Le problème proposé est ainsi ramené à un autre, qu'on ramène par le même procédé à un troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à une question déjà traitée, ou à un problème dont la solution soit intuitive, c'est-à-dire ne soit que la mise en œuvre d'un théorème connu.

C'est ainsi que la question de mener par un point une parallèle à une droite a été ramenée (149) à la construction d'un angle égal à un angle donné, et que les divers tracés relatifs aux perpendiculaires, à la division d'un angle ou d'un arc en deux parties égales, à la construction d'ún cercle passant par trois points (154, 152, 153), ne sont que des applications du problème du n° 151.

De même, si l'on proposait de *mener une tangente commune à deux cercles* O et O' (*fig.* 116), en supposant le problème résolu et imaginant par le centre O' du plus petit cercle une parallèle à la tangente commune AA', on verrait que cette parallèle O'B est tangente à un cercle concentrique au plus

grand et décrit avec un rayon égal à la différence (ou à la somme) des rayons des cercles donnés; le problème serait ainsi ramené à conduire par un point extérieur des tangentes à deux cercles concentriques.

Cette méthode des *substitutions successives* n'est pas d'ailleurs particulière à la Géométrie; c'est la marche que suit nécessairement l'esprit humain dans ses recherches de toute nature.

163. La plupart des problèmes de Géométrie reviennent en dernière analyse à la détermination d'un point d'après certaines conditions. S'agit-il, par exemple, de faire passer un cercle par trois points donnés? il faut trouver le centre. Veut-on mener une tangente à un cercle par un point extérieur? on cherche le point de contact; etc. D'après cela, si on laisse de côté une des conditions données, les autres conditions ne suffiront plus pour déterminer un point unique, et il existera une infinité de points remplissant ces conditions et formant par leur ensemble un lieu géométrique auquel appartiendra le point cherché. En reprenant la condition délaissée, et faisant abstraction d'une autre, on aura un nouveau lieu géométrique qui rencontrera le premier au point demandé. C'est à l'aide de cette méthode, par *intersection de lieux géométriques*, que nous avons résolu le problème du nº 153 et toutes les questions du paragraphe actuel.

Ainsi, *pour trouver le centre d'un cercle passant par trois points donnés* A, B, C (153), on fait d'abord abstraction du point C, et l'on trouve pour le lieu des centres des circonférences passant par A et B la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB; puis, reprenant le point C et délaissant le point A, on trouve pour le lieu des centres passant par B et C la perpendiculaire élevée sur le milieu de BC. Ces deux perpendiculaires se coupent au centre demandé.

Dans le problème *mener une tangente au cercle* O *par un point extérieur* A (156), le point de contact inconnu est déterminé par l'intersection de la circonférence O, qui est un premier lieu, et de la circonférence décrite sur AO comme diamètre, qui est le lieu des points d'où l'on voit, comme du point de contact, la droite AO sous un angle droit.

Dans la recherche du *segment capable d'un angle donné* (161), la méthode des substitutions successives ramène d'abord la question à la recherche du centre d'un cercle passant par deux points donnés A et B, et tangent en B à une droite donnée CBD; puis, en faisant tour à tour abstraction de la tangente CD et du point A, on trouve deux lieux rectilignes EO et BO qui se coupent au centre cherché.

La méthode par intersection de lieux géométriques, due à l'école de Platon (430-347 av. J.-C.), est peut-être la plus générale et la plus féconde de toutes les méthodes de la Géométrie. On conçoit que l'élégance et la valeur pratique de la solution sont subordonnées au choix plus ou moins habile des deux conditions que l'on délaisse tour à tour; car, de ce choix, dépendent la nature et la facilité de recherche des deux lieux employés. La ligne droite et le cercle sont les seuls lieux qui doivent figurer dans les problèmes relatifs aux éléments de géométrie plane, où toutes les constructions doivent s'effectuer avec la règle et le compas.

EXERCICES

1. Mener à un cercle une tangente qui fasse un angle donné avec une droite donnée.

2. Par un point pris dans le plan d'un cercle, mener une sécante sur laquelle le cercle intercepte une corde de longueur donnée.

3. Deux cercles étant donnés, mener une sécante telle, que les cordes interceptées par les deux cercles aient des longueurs données.

4. Des sommets d'un triangle comme centres, décrire trois cercles qui se touchent deux à deux.

5. Décrire un cercle tangent à une circonférence donnée, et à une droite donnée en un point donné.

6. Décrire un cercle qui touche deux circonférences, et l'une d'elles en un point donné.

7. Construire un triangle rectangle, connaissant :

1° L'un des côtés de l'angle droit et l'excès de l'hypoténuse sur le troisième côté;

2° Les angles et l'excès de l'hypoténuse sur un des côtés de l'angle droit.

8. Étant donnés un cercle et un angle circonscrit, toute tangente à l'arc qui tourne sa convexité vers le sommet détermine avec les côtés

de l'angle un triangle dont le périmètre est constant et dont le troisième côté est vu du centre du cercle sous un angle constant. — Qu'arrive-t-il lorsque la tangente est menée par un point de l'arc concave?

9. Dans tout triangle rectangle, le diamètre du cercle inscrit est égal à l'excès de la somme des deux côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse.

10. Construire un triangle, connaissant la base, la différence des angles à la base, et sachant que le sommet doit être situé sur une droite donnée.

QUESTIONS PROPOSÉES

SUR LE DEUXIÈME LIVRE.

1. Étant données la base d'un triangle et la différence des deux autres côtés, trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées des extrémités de la base sur la bissectrice de l'angle au sommet. — Même question en remplaçant la différence des deux côtés par leur somme, et la bissectrice de l'angle au sommet par celle de son supplément.

2. Si l'on divise la corde d'un arc de cercle en trois parties égales, les rayons qui passent par les points de division partagent l'arc en trois parties, dont les deux extrêmes sont égales entre elles et moindres que la partie intermédiaire.

3. Quel est le lieu des centres des circonférences de même rayon qui partagent une circonférence donnée en deux parties égales?

4. Quel est le lieu des centres des circonférences de même rayon qui coupent sous un angle donné une circonférence donnée?

5. O étant le point de concours des hauteurs d'un triangle ABC, et G le point où la hauteur AD rencontre le cercle circonscrit au triangle, on a $OD = DG$.

6. Les pieds des hauteurs d'un triangle, les milieux des segments de ces hauteurs compris entre leur point de rencontre et les sommets du triangle, les milieux des trois côtés, sont neuf points situés sur une même circonférence dont le rayon est la moitié du rayon du cercle circonscrit, et dont le centre est au milieu de la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de concours des hauteurs.

7. Étant donnés un triangle ABC et le cercle circonscrit, si du milieu de l'un quelconque des deux arcs sous-tendus par le côté BC on abaisse des perpendiculaires sur AB et sur AC, la somme des distances des pieds de ces perpendiculaires aux sommets du triangle est égale à la demi-somme ou à la demi-différence des côtés AB et AC.

8. Si dans un quadrilatère ABCD on prolonge les côtés opposés AB et CD jusqu'à leur rencontre E, puis les côtés opposés AD et BC jusqu'à

leur rencontre F, on forme une figure qu'on nomme *quadrilatère complet*, et qui renferme quatre triangles ABF, ADE, BCE, DCF. Démontrer : 1° que les cercles circonscrits à ces quatre triangles passent par un même point; 2° que ce point et les centres des quatre cercles sont sur une même circonférence.

9. On donne un cercle et un point fixe A situé dans son plan. ABC étant une corde quelconque issue du point A, on élève sur le milieu de cette corde une perpendiculaire IM égale à IA. Quel est le lieu des points M?

10. Une circonférence roule dans l'intérieur d'un cercle de rayon double : quel est le lieu décrit par un point de cette circonférence?

11. Par un point pris dans le plan d'un parallélogramme, mener une sécante telle, que la partie comprise entre deux côtés opposés (prolongés s'il le faut) soit égale à la partie comprise entre les deux autres côtés.

12. Construire un triangle, connaissant son périmètre, un angle en grandeur et en position, et un point du troisième côté.

13. Construire un triangle ayant des angles donnés et tel, que ses sommets appartiennent à deux circonférences concentriques données.

14. Étant donnés un triangle, le cercle inscrit et les trois cercles ex-inscrits, démontrer : 1° que les quatre points de contact qui se trouvent sur un même côté (deux intérieurs et deux extérieurs) sont deux à deux équidistants du milieu de ce côté; 2° que la distance d'un point de contact extérieur, au plus éloigné des deux sommets situés sur le même côté, est égale au demi-périmètre du triangle; 3° que la distance du point de contact du cercle inscrit à l'un des sommets situés sur le même côté est égale au demi-périmètre diminué du côté opposé à ce sommet; 4° que la distance des deux points de contact intérieurs situés sur le côté considéré est égale à la différence des deux autres côtés du triangle; 5° que la distance des deux points de contact extérieurs est égale à la somme des deux autres côtés du triangle; 6° que la distance du point de contact du cercle inscrit à l'un des points de contact extérieurs est égale à celui des deux autres côtés du triangle qui aboutit au sommet situé entre ces deux points de contact.

15. Soient ABC un triangle, D le centre du cercle circonscrit, O celui du cercle inscrit, et O′, O″, O‴, les centres des cercles ex-inscrits respectivement situés dans les angles A, B, C; démontrer : 1° que le cercle circonscrit passe par les milieux des droites OO′, OO″, OO‴; 2° que les quatre points O, B, C, O′, sont sur un même cercle dont le centre est sur la circonférence D; 3° que les points O″, B, C, O‴, sont sur un même cercle dont le centre est sur la circonférence D.

16. Si l'on désigne par R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC; par r celui du cercle inscrit, par r', r'', r''', ceux des cercles ex-in-

crits; par δ, δ', δ'', les perpendiculaires abaissées du centre du cercle circonscrit sur les côtés; par μ, μ', μ'', les portions de ces perpendiculaires comprises entre les côtés du triangle et la circonférence circonscrite, on a les relations

$$r' + r'' + r''' = 4R + r,$$
$$\mu + \mu' + \mu'' = 2R - r,$$
$$\delta + \delta' + \delta'' = R + r.$$

La dernière relation suppose que le centre D du cercle circonscrit est situé à l'intérieur du triangle. Dans le cas où le point D est extérieur, comment faut-il modifier cette relation ?

17. Construire un triangle, connaissant :

1° Les pieds des trois hauteurs;

2° Un angle, une hauteur et le périmètre (deux cas);

3° Un côté, l'un des angles adjacents et la longueur de la bissectrice de cet angle;

4° La somme de deux côtés et les angles;

5° Le périmètre et les angles;

6° Un angle, la longueur de sa bissectrice et l'une des hauteurs (deux cas);

7° Les angles et une hauteur;

8° La base, la somme des deux autres côtés et la différence des angles à la base.

9° Un angle ainsi que la hauteur et la médiane issues de son sommet;

10° Un côté, un angle et une hauteur (cinq cas).

11° Le rayon du cercle inscrit, un angle et la hauteur issue de son sommet;

12° Un côté, la somme ou la différence des deux autres, et le rayon du cercle inscrit ou de l'un des cercles ex-inscrits;

13° Les centres des trois cercles ex-inscrits.



LIVRE III.

LES FIGURES SEMBLABLES.

§ I.

PROGRAMME OFFICIEL : *Lignes proportionnelles.*

DÉFINITIONS.

164. On dit que deux grandeurs sont *proportionnelles* l'une à l'autre lorsque le rapport de deux valeurs quelconques A et B de la première est égal au rapport des valeurs correspondantes C et D de la seconde (121); et l'on donne le nom de *proportion* à l'égalité des deux rapports

$$(1) \qquad \frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

Lorsque les deux grandeurs considérées sont de même espèce, comme deux longueurs, deux volumes, etc., on dit que la valeur D est une *quatrième proportionnelle* à A, B, C. Dans la même hypothèse, si les valeurs B et C sont égales entre elles, la relation (1) devient

$$(2) \qquad \frac{A}{B} = \frac{B}{D},$$

et l'on dit que B est *moyenne proportionnelle* entre A et D, et que D est une *troisième proportionnelle* à A et B.

165. Rapportons chacune des grandeurs considérées à une unité de son espèce; a et b étant les nombres qui mesurent les valeurs A et B de la première, on aura, d'après un théorème connu (120),

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}.$$

De même, c et d étant les rapports des valeurs C et D à l'u-

nité adoptée pour la mesure de la seconde grandeur, on aura

$$\frac{C}{D} = \frac{c}{d}.$$

Par suite, la relation (1) se traduit par l'égalité *numérique*

$$(3) \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

qui prend aussi le nom de *proportion;* les deux nombres a et d sont dits les termes *extrêmes,* et b et c les *moyens.*

On peut alors chasser les dénominateurs et écrire

$$ad = bc.$$

On énonce ce résultat de la manière suivante : *Dans toute proportion (numérique), le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

De même, la relation (2) se traduit par l'égalité numérique

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$$

ou

$$(4) \qquad b^2 = ad \quad \text{et} \quad b = \sqrt{ad}.$$

Ainsi, *quand une grandeur est moyenne proportionnelle entre deux autres, le nombre qui la mesure est égal à la racine carrée du produit des nombres qui mesurent les deux autres, l'unité étant la même.*

166. Il importe de bien saisir la distinction qui sépare les relations (1) et (3). Dans la première, on ne saurait, par exemple, chasser les dénominateurs; le produit de deux grandeurs n'offre en effet aucun sens, car, dans toute multiplication, le multiplicateur au moins est un nombre abstrait.

Toutefois, nous parlerons souvent dans la suite du *produit de deux lignes;* mais il faudra toujours entendre par là le produit des nombres qui mesurent ces lignes rapportées à une unité commune.

167. Voici un LEMME qui nous sera souvent utile:

Supposons qu'un mobile parcoure de gauche à droite une ligne droite indéfinie XY sur laquelle sont marqués deux

points fixes A et B, et étudions les variations du rapport des distances du mobile aux points A et B (*fig.* 117).

Fig. 117.



Pour toute position M' du mobile à gauche de A, on a

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{M'B - AB}{M'B} = 1 - \frac{AB}{M'B}.$$

On voit par là que si M' est très-loin, le dénominateur M'B est très-grand ; par suite, la fraction $\frac{AB}{M'B}$ est très-petite, et le rapport $\frac{M'A}{M'B}$ est aussi voisin qu'on veut de l'unité. A mesure que le mobile se rapproche du point A, le dénominateur M'B diminue en tendant vers AB ; la fraction $\frac{AB}{M'B}$ augmente en se rapprochant de l'unité, et le rapport $\frac{M'A}{M'B}$ diminue jusqu'à 0, valeur qu'il atteint lorsque le mobile arrive en A. Ainsi, *à gauche du point* A, *le rapport considéré décroît d'une manière continue de* 1 *à* 0.

Au delà du point A, le rapport $\frac{MA}{MB}$ augmente, puisque son numérateur croît et que son dénominateur diminue ; et il devient égal à 1, lorsque le mobile est au point O milieu de AB. Ainsi, *de* A *en* O, *le rapport considéré croît d'une manière continue de* 0 *à* 1.

A partir du point O, le rapport $\frac{NA}{NB}$ continue à croître pour les mêmes motifs ; à mesure que le mobile se rapproche de B, le numérateur NA tend vers AB, le dénominateur NB diminue en tendant vers 0 ; et, par suite, le rapport acquiert des valeurs de plus en plus grandes et peut même surpasser tel nombre qu'on voudra. On exprime ce fait en disant que la valeur du rapport devient *infinie*, et l'on représente par le symbole ∞ cet état limite. Ainsi, *de* O *en* B, *le rapport considéré croît d'une manière continue de* 1 *à* $l'\infty$.

Enfin, pour toute position N′ du mobile au delà de B, on a

$$\frac{N'A}{N'B} = \frac{N'B + AB}{N'B} = 1 + \frac{AB}{N'B};$$

lorsque le point N′ s'éloigne de B, le dénominateur N′B augmente de plus en plus jusqu'à l'infini; la fraction $\frac{AB}{N'B}$ diminue graduellement jusqu'à zéro, et le rapport $\frac{N'A}{N'B}$ décroît successivement jusqu'à 1. Ainsi, *à droite de* B, *le rapport considéré décroît d'une manière continue de l'*∞ *à* 1.

En résumé, le rapport considéré prend deux fois à gauche du point O toutes les valeurs numériques moindres que 1, et deux fois à droite du point O toutes les valeurs numériques supérieures à 1.

Donc enfin, étant donnés deux points fixes A et B, *il existe toujours sur la droite indéfinie* XY *qui les contient, deux points, et seulement deux, tels que les rapports des distances de chacun d'eux aux points* A *et* B *aient une même valeur donnée. Ces deux points sont situés d'un même côté du milieu* O *de* AB, *l'un entre* A *et* B, *l'autre en dehors*; *ils sont d'ailleurs à gauche de* O, *comme* M *et* M′, *ou à droite de* O, *comme* N *et* N′, *suivant que la valeur donnée du rapport est inférieure ou supérieure à l'unité.*

Le point N, situé entre A et B, divise réellement la droite AB dans le rapport donné; par extension, on dit que le point extérieur N′ divise aussi la droite AB dans ce même rapport. Pour éviter toute confusion, on qualifie alors d'*additifs* les segments NA et NB déterminés par le point N, et dont AB est la somme, et de *soustractifs* les segments N′A et N′B déterminés par le point N′, et dont AB est la différence.

Lorsqu'une droite AB est ainsi divisée par deux points N et N′, de façon que les segments additifs NA et NB soient proportionnels aux segments soustractifs N′A et N′B, on dit que ces deux points N et N′ divisent *harmoniquement* la droite AB ou sont *conjugués harmoniques* par rapport à la droite AB. La relation

$$\frac{NA}{NB} = \frac{N'A}{N'B}$$

pouvant être écrite

$$\frac{AN}{AN'} = \frac{BN}{BN'},$$

on voit que, *réciproquement*, A et B sont conjugués harmoniques par rapport à la droite NN′.

THÉORÈME.

168. *Deux droites quelconques sont coupées en parties proportionnelles par une série de droites parallèles;* en d'autres termes, *lorsque deux droites* AG, A′G′, *sont coupées par une série de parallèles* AA′, BB′,..., GG′, *le rapport de deux segments quelconques de la première droite est égal au rapport des segments correspondants de la seconde* (*fig.* 118, 119).

Fig. 118.

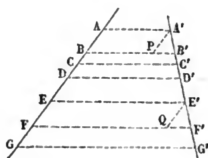
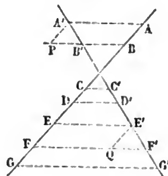


Fig. 119.



Il suffit (125) de prouver :

1° Que, *si deux segments* AB *et* EF *de la première droite sont égaux entre eux, les segments correspondants* A′B′ *et* E′F′ *de la seconde droite sont aussi égaux entre eux ;*

2° Que, *si sur la première droite, un segment* EG *est égal à la somme de deux autres* AB *et* CD, *sur la seconde droite, le segment* E′G′, *correspondant à* EG, *est aussi égal à la somme des segments* A′B′ *et* C′D′ *qui correspondent à* AB *et à* CD.

1° Menons A′P et E′Q parallèles à AG; A′P et AB seront égales comme parallèles comprises entre parallèles; E′Q sera égale à EF pour la même raison; par suite, on aura A′P = E′Q, puisqu'on a par hypothèse AB = EF. D'ailleurs, les angles PA′B′, QE′F′, sont égaux comme correspondants, et les angles A′PB′, E′QF′, comme ayant les côtés parallèles et de même sens; donc, les triangles PA′B′, QE′F′, ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, sont égaux, et l'on a A′B′ = E′F′.

2° Puisque, par hypothèse, $EF = AB$, et $GF = CD$, on a, d'après l'alinéa qui précède, $E'F' = A'B'$ et $F'G' = C'D'$; le segment $E'G'$ est donc égal à la somme de $A'B'$ et de $C'D'$.

La figure peut offrir deux dispositions différentes; mais la démonstration ne change pas.

THÉORÈME.

169. *Toute parallèle* DE *à l'un des côtés* BC *d'un triangle* ABC *divise les deux autres côtés en parties proportionnelles* (*fig.* 120, 121, 122).

Fig. 120.

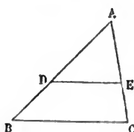


Fig. 121.

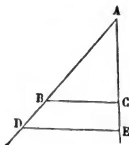
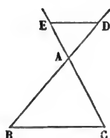


Fig. 122.



En effet, en concevant par le sommet A une parallèle à BC, on voit (168) qu'on a

(1) $$\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC},$$

ou encore

(2) $$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},$$

(3) $$\frac{BA}{BD} = \frac{CA}{CE}.$$

Chacune de ces proportions se trouve ici démontrée directement; mais il convient de remarquer qu'en vertu des règles de l'Arithmétique, l'une quelconque d'entre elles entraîne les deux autres.

Nous avons indiqué les trois dispositions que peut présenter la figure.

170. Réciproquement, *si deux points* D *et* E, *situés respectivement sur deux côtés* AB *et* AC *d'un triangle* ABC, *divisent ces côtés en parties proportionnelles, la droite* DE *qui unit ces deux points est parallèle au troisième côté* BC.

Puisque chacune des proportions (1), (2), (3), entraîne les

deux autres, on peut partir de l'une quelconque d'entre elles comme hypothèse; nous choisirons par exemple la première

$$(1) \qquad \frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}.$$

Cela posé, il faut distinguer plusieurs cas :

Supposons d'abord les points D *et* E *situés sur les côtés eux-mêmes*, c'est-à-dire l'un D entre A et B, et l'autre E entre A et C (*fig.* 120); et concevons par le point D une parallèle à BC. Cette parallèle déterminera (169) entre A et C un point dont les distances à A et C formeront un rapport égal à $\frac{DA}{DB}$. Or, entre A et C (167), il n'existe qu'un seul point dont le rapport des distances à A et C soit égal à $\frac{DA}{DB}$, et ce point est par hypothèse le point E. Donc la parallèle à BC, menée par le point D, passe par E et coïncide avec DE. Donc enfin DE est parallèle à BC.

Supposons, en second lieu, les points D *et* E *situés sur les prolongements des côtés*. Si D est, par exemple, au-dessous de AB (*fig.* 121), le rapport $\frac{DA}{DB}$ sera supérieur à 1; il en sera donc de même de son égal $\frac{EA}{EC}$ et, par suite, le point E sera pareillement au-dessous de AC. Dès lors la démonstration s'achèvera comme ci-dessus.

On verrait de même que si D était au-dessus de BA (*fig.* 122), la proportion (1) exigerait que E fût au-dessus de CA; puis, on achèverait la démonstration comme dans le premier cas.

Cette réciproque demande une certaine attention; l'hypothèse renferme en réalité deux parties : la première consiste dans l'existence de la proportion (1), et l'autre est relative à la situation des points D et E qui doivent être placés de la même manière sur les côtés AB et AC. Bien que sous-entendue d'ordinaire pour plus de brièveté, cette seconde partie est indispensable; car si l'un des points D était, par exemple, sur le côté lui-même et l'autre E sur l'un des prolongements, la droite DE ne saurait être parallèle à BC, bien que la proportion (1) fût satisfaite.

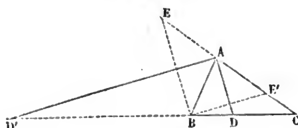
THÉORÈME.

171. *Dans tout triangle* ABC (*fig.* 123) :

1° *La bissectrice* AD *d'un angle quelconque* BAC *divise le côté opposé* BC *en deux segments additifs* DB *et* DC *proportionnels aux côtés adjacents;*

2° *La bissectrice* AD' *d'un angle extérieur* BAE *divise le côté opposé* BC *en deux segments soustractifs* D'B, D'C, *proportionnels aux côtés adjacents.*

Fig. 123.



En effet :

1° En menant BE parallèle à la bissectrice AD, on a dans le triangle BEC (169)

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AE}{AC}.$$

D'autre part, l'angle BEA est le correspondant de l'angle DAC, et les angles EBA et DAB sont alternes-internes; or, AD étant bissectrice de l'angle BAC, les angles DAC, DAB, sont égaux; par suite, les angles BEA, EBA, sont aussi égaux, et le triangle BAE est isocèle. En remplaçant dès lors, dans la proportion qui précède, le côté AE par son égal AB, on a

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

2° En menant BE' parallèle à la bissectrice AD' de l'angle extérieur BAE, on a dans le triangle D'AC (169)

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AE'}{AC}.$$

D'autre part, l'angle BE'A est le correspondant de l'angle D'AE, et les angles E'BA et D'AB sont alternes-internes; or, AD' étant bissectrice de l'angle BAE, les angles D'AE, D'AB, sont

égaux; par suite, les angles BE'A, E'BA, sont aussi égaux, et le triangle BAE' est isocèle. En remplaçant dès lors, dans la proportion qui précède, le côté AE' par son égal AB, on a

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}.$$

172. Réciproquement, *si une droite, issue du sommet d'un angle d'un triangle, divise le côté opposé en parties proportionnelles aux côtés adjacents, cette droite est la bissectrice de l'angle considéré ou de l'angle supplémentaire, suivant qu'elle rencontre le côté opposé lui-même ou l'un de ses prolongements.*

En effet, entre B et C il n'existe qu'un point D qui divise BC dans le rapport de AB à AC (167); le théorème direct exige donc que ce point appartienne à la bissectrice de l'angle BAC (*fig.* 123).

De même, en dehors de BC, il n'existe qu'un point D' qui divise BC en deux segments soustractifs proportionnels à AB et AC (167); dès lors, le théorème direct exige que ce point appartienne à la bissectrice de l'angle extérieur BAE (*fig.* 123).

Corollaire.

173. Les deux points D et D' satisfont à la proportion

$$\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C};$$

ils sont donc conjugués harmoniques par rapport à la droite BC. Ainsi, *les deux côtés d'un angle, la bissectrice de cet angle et celle de son supplément, déterminant quatre points sur une sécante quelconque, les deux derniers sont conjugués par rapport aux deux autres.*

Par suite, *si l'on a un triangle* PMQ *inscrit dans un cercle, le diamètre* DD' *perpendiculaire à l'un des côtés du triangle est divisé harmoniquement par les deux autres côtés* (*fig.* 124).

Car les arcs D'P et D'Q étant égaux, la droite M'D est bissectrice de l'angle PMQ, et sa perpendiculaire MD est alors bissectrice de l'angle adjacent et supplémentaire QMC.

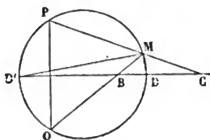
La réciproque est évidente.

THÉORÈME.

174. *Le lieu géométrique des points dont les distances à deux points fixes sont dans un rapport donné est une circonférence (fig. 124).*

Soient B et C les deux points fixes, $\frac{m}{n}$ le rapport donné et M

Fig. 124.



un point quelconque du lieu, c'est-à-dire un point tel qu'on ait

(1) $$\frac{MB}{MC} = \frac{m}{n}.$$

Il existe d'abord, sur la droite indéfinie BC, deux points du lieu, c'est-à-dire (167) deux points D et D' qui satisfont aux relations

$$\frac{DB}{DC} = \frac{m}{n}, \quad \frac{D'B}{D'C} = \frac{m}{n};$$

on déduit de là

$$\frac{DB}{DC} = \frac{MB}{MC} \quad \text{et} \quad \frac{D'B}{D'C} = \frac{MB}{MC}.$$

Ces proportions prouvent (172), la première que MD est la bissectrice de l'angle BMC, et la seconde que MD' est la bissectrice de l'angle supplémentaire BMP. Or, les bissectrices de deux angles adjacents et supplémentaires sont rectangulaires. Donc, le point variable M est le sommet d'un angle droit DMD' dont les deux côtés passent constamment par deux points fixes D et D'; tout point M du lieu est donc situé sur la circonférence décrite sur DD' comme diamètre.

Il reste à démontrer que, réciproquement, tout point M de cette circonférence DD' appartient au lieu, c'est-à-dire satisfait à la relation (1).

Or, puisque les points B et C divisent harmoniquement le diamètre DD', les points P et Q, où les droites CM et MB

rencontrent la circonférence, sont symétriques par rapport au diamètre DD′ (173). Les arcs D′P et D′Q sont donc égaux, et la droite MD′ est bissectrice de l'angle BMP. On a par suite la proportion (171)

$$\frac{MB}{MC} = \frac{D'B}{D'C} = \frac{m}{n}.$$

EXERCICES.

1. d étant la longueur d'une droite BC, et M et M′ étant les points conjugués qui la divisent dans le rapport $\frac{a}{b}$, démontrer les relations suivantes :

$$MA = \frac{ad}{a+b}, \quad MB = \frac{bd}{a+b};$$

$$M'A = \frac{ad}{a-b}, \quad M'B = \frac{bd}{a-b} \quad (\text{si } a \text{ est } > b),$$

et

$$M'A = \frac{ad}{b-a}, \quad M'B = \frac{bd}{b-a} \quad (\text{si } a \text{ est } < b).$$

2. Démontrer que, si l'on mène entre les deux côtés d'un triangle une suite de parallèles à la base, la médiane qui correspond à cette base est le lieu des points d'intersection des diagonales des trapèzes ainsi obtenus.

3. Trouver le lieu géométrique des points d'un plan également éclairés par deux points lumineux placés dans ce plan, et dont les intensités à l'unité de distance sont représentées par les nombres a et b.

4. Trouver dans le plan déterminé par trois points lumineux le point également éclairé par chacun d'eux.

5. Trouver le lieu des points qui partagent dans un rapport donné $\frac{m}{n}$ toutes les droites comprises entre un point donné A et un cercle donné O.

6. ABC est un triangle équilatéral, E un point de AC; sur BC prolongé, on prend des longueurs CD, CF, respectivement égales à CA et à CE, et l'on mène les droites AF et DE qui se coupent en H. Prouver qu'on a $\frac{HC}{EC} = \frac{AC}{AC+EC}$.

7. Soient deux droites quelconques AB et XY. Si AB est divisée au point C dans le rapport $\frac{m}{n}$, et si des points A, B, C, on abaisse sur XY les perpendiculaires AA′, BB′, CC′, on aura toujours

$$CC'(m+n) = n.AA' + m.BB'.$$

§ II.

Programme officiel : *Polygones semblables. — Cas de similitude des triangles. — Rapport des périmètres de deux polygones semblables.*

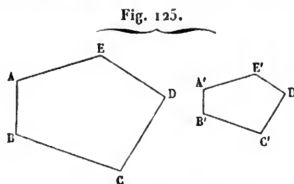
DÉFINITIONS.

175. Deux polygones d'un même nombre de côtés sont dits *semblables* lorsqu'ils ont les angles égaux et les côtés homologues proportionnels.

On entend par *cotés homologues* ceux qui sont adjacents à des angles respectivement égaux, et l'on donne à ces angles eux-mêmes le nom d'*angles homologues*; enfin, on appelle *rapport de similitude* des deux polygones le rapport de deux côtés homologues quelconques.

Ainsi, les deux pentagones ABCDE, A'B'C'D'E' (*fig.* 125)

Fig. 125.



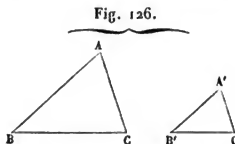
sont semblables, s'ils satisfont aux relations

$$A = A', \quad B = B', \quad C = C', \quad D = D', \quad E = E',$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$

Dans les triangles semblables, tels que ABC, A'B'C' (*fig.* 126),

Fig. 126.



les côtés homologues sont opposés aux angles égaux.

LEMME.

176. *En coupant un triangle* ABC *par une parallèle* DE *à l'un des côtés* BC, *on détermine un nouveau triangle* ADE *semblable au premier* (*fig.* 127, 128, 129).

Fig. 127.

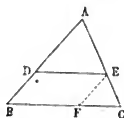


Fig. 128.

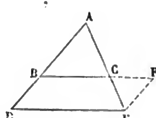
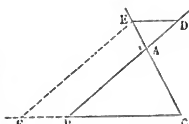


Fig. 129.



En effet :

D'abord les deux triangles ADE, ABC (*fig.* 127) ont leurs angles respectivement égaux ; car l'angle A est commun et les angles ADE, ABC, sont correspondants, ainsi que les angles AED, ACB.

En second lieu, les côtés homologues sont proportionnels ; car, DE étant parallèle à BC, on a (169)

$$(1) \qquad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC};$$

puis, en menant EF parallèle à AB, on a encore

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC},$$

ou, comme les parallèles DE, BF, comprises entre parallèles, sont égales,

$$(2) \qquad \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC};$$

la réunion des proportions (1) et (2), qui ont un rapport commun, donne la suite de rapports égaux

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

Scolie.

177. La proposition énoncée subsiste lorsque la parallèle DE est située au-dessous de BC (*fig.* 128), ou au-dessus de A

(*fig.* 129). La démonstration est absolument la même dans le cas de la *fig.* 128; et, dans le cas de la *fig.* 129, toute la différence consiste en ce que les angles ADE, ABC, ainsi que les angles AED, ACB, sont alternes-internes au lieu d'être correspondants.

THÉORÈME.

178. *Deux triangles* ABC, A′B′C′, *sont semblables :*

1° *Lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun ;*

2° *Lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels ;*

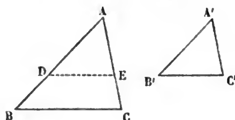
3° *Lorsqu'ils ont les côtés proportionnels.*

1° Supposons qu'on ait (*fig.* 130)

$$A = A', \quad B = B'.$$

Prenons sur le côté AB homologue de A′B′ une longueur AD égale à A′B′, et menons DE parallèle à BC. Le triangle ADE sera semblable à ABC (176), et il suffit de démontrer l'égalité des triangles ADE, A′B′C′.

Fig. 130.



Or, les angles A et A′ sont égaux par hypothèse; l'angle ADE est correspondant de l'angle ABC, qui, par hypothèse, est égal à B′; enfin, le côté AD est égal à A′B′ par construction. Donc les deux triangles ADE, A′B′C′, sont égaux, comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux.

2° Supposons qu'on ait

$$(1) \qquad A = A', \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'};$$

prenons sur le côté AB homologue de A′B′ une longueur AD égale à A′B′, et menons DE parallèle à BC. Le triangle ADE sera semblable au triangle ABC (176), et il suffit de démontrer l'égalité des triangles ADE, A′B′C′.

Or, la similitude des triangles ABC, ADE, donne la proportion

$$(2) \qquad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE},$$

qui a les mêmes numérateurs que la proportion (1); les dénominateurs AD et A′B′ des deux premiers rapports étant en outre égaux par construction, il faut que AE = A′C′; les deux triangles ADE, A′B′C′, sont donc égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux.

3° Supposons qu'on ait

$$(1) \qquad \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA};$$

ces deux triangles sont semblables.

Prenons sur le côté AB une longueur AD égale à A′B′, et menons DE parallèle à BC. Le triangle ADE sera semblable à ABC (176), et il suffit de démontrer l'égalité des triangles ADE, A′B′C′.

Or, la similitude des triangles ADE, ABC, donne la série de rapports égaux

$$(2) \qquad \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{EA}{CA},$$

qui présente les mêmes dénominateurs que la série (1). Dès lors, les numérateurs AD, A′B′, des deux premiers rapports étant égaux par construction, il faut qu'on ait aussi

$$DE = B'C', \quad EA = C'A';$$

et, par suite, les deux triangles ADE, A′B′C′, sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun.

Corollaires.

179. *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont leurs côtés respectivement parallèles ou respectivement perpendiculaires*; car, dans l'un et l'autre cas, ces triangles ont leurs angles égaux chacun à chacun (78).

180. *Deux triangles rectangles sont semblables, lorsqu'ils ont un angle aigu égal.*

SCOLIES.

181. Il résulte du n° 178 que, *dans les triangles, l'égalité des angles entraîne la proportionnalité des côtés, et réciproquement.* Cette propriété fondamentale, attribuée à Thalès (639-548 av. J. C.), ne subsiste pas pour des polygones quelconques. Par exemple, un carré et un rectangle ont leurs angles égaux, et cependant leurs côtés homologues ne sont pas proportionnels. De même, un carré et un losange ont leurs côtés proportionnels, et cependant leurs angles ne sont pas égaux.

182. Le tableau suivant, dans lequel nous avons réuni les cas d'égalité et les cas de similitude de deux triangles, en les faisant correspondre un à un, permet de comparer les deux théories.

Deux triangles sont :

égaux,	semblables,
lorsqu'ils ont :	
1° Deux angles égaux comprenant un côté égal ;	1° Deux angles égaux ;
2° Un angle égal compris entre deux côtés égaux ;	2° Un angle égal compris entre deux côtés proportionnels ;
3° Les trois côtés égaux.	3° Les trois côtés proportionnels.

On voit que chaque cas de similitude ne renferme que *deux* conditions, tandis que l'égalité en exige toujours *trois*.

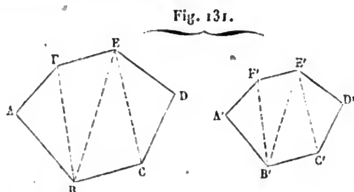
183. Il importe en outre de remarquer le mode uniforme de démonstration que nous avons adopté au n° 178. Le procédé consiste à prendre, sur un côté du premier triangle, à partir du sommet, une longueur égale au côté homologue du second; puis à mener, par le point ainsi déterminé, une parallèle à l'un des deux autres côtés du premier triangle. On construit ainsi un triangle auxiliaire qui, d'après le lemme du n° 176, est semblable au premier; et les conditions renfermées dans l'hypothèse permettent ensuite de démontrer aisément que ce triangle auxiliaire est égal au second triangle, en vertu du cas d'égalité qui correspond au cas de similitude que l'on étudie.

184. Enfin, il reste à montrer l'usage de cette théorie, c'est-à-dire à indiquer de quelle manière les cas de similitude interviennent dans la démonstration des théorèmes. Deux triangles semblables satisfont à cinq conditions, et chaque cas de similitude comprend deux de ces conditions groupées de telle sorte que, lorsqu'elles sont satisfaites, les cinq soient remplies. Dès lors, quand, dans une certaine figure, on aura reconnu la similitude de deux triangles par l'application de l'un des trois cas, on devra en conclure immédiatement que les trois autres conditions sont remplies, et l'on aura acquis de cette manière de nouvelles données qui permettront d'aller plus loin.

THÉORÈME.

185. *Deux polygones, composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement disposés, sont semblables* (*fig.* 131).

Fig. 131.



Soient ABF, FBE, EBC, CED, et A'B'F', F'B'E', E'B'C', C'E'D', deux séries de triangles respectivement semblables et semblablement disposés; le polygone ABCDEF, formé par les premiers triangles, est semblable au polygone A'B'C'D'E'F' que forment les seconds.

En effet :

1° Les angles des deux polygones sont égaux, soit comme angles homologues de deux triangles semblables, soit comme sommes d'angles homologues de plusieurs triangles semblables. Ainsi, les angles A et A' sont égaux comme angles homologues des deux triangles semblables BAF, B'A'F', tandis que l'angle B est égal à l'angle B' comme étant la somme des trois angles ABF, FBE, EBC, respectivement égaux aux trois angles A'B'F', F'B'E', E'B'C', qui composent l'angle B'.

2° Les côtés homologues sont proportionnels, car on a successivement :

A cause des triangles semblables ABF, A′B′F′,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'F'}{AF} = \frac{B'F'}{BF};$$

A cause des triangles semblables BFE, B′F′E′,

$$\frac{B'F'}{BF} = \frac{F'E'}{FE} = \frac{E'B'}{EB};$$

A cause des triangles semblables EBC, E′B′C′,

$$\frac{E'B'}{EB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'E'}{CE};$$

A cause des triangles semblables CED, C′E′D′,

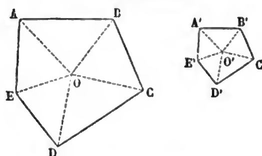
$$\frac{C'E'}{CE} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE};$$

d'où, en supprimant les rapports communs,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'F'}{AF} = \frac{F'E'}{FE} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE}.$$

186. Réciproquement, *deux polygones semblables peuvent être décomposés en un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés* (*fig.* 132).

Fig. 132.



Soient ABCDE, A′B′C′D′E′, deux polygones semblables. Prenons à l'intérieur du premier un point quelconque O, et joignons ce point aux extrémités du côté AB; puis, sur le côté A′B′ homologue de AB, et dans l'intérieur du polygone A′B′C′D′E′, construisons les angles B′A′O′, A′B′O′, res-

pectivement égaux aux angles BAO, ABO. Le point O′ sera le sommet d'un triangle O′A′B′ semblable au triangle OAB (178), et situé, par rapport au second polygone A′B′C′D′E′, de la même manière que le triangle OAB par rapport au polygone ABCDE.

Cela posé, joignons le point O à tous les sommets du premier polygone, et le point O′ à tous les sommets du second; les deux polygones seront ainsi décomposés en un même nombre de triangles dont il s'agit de démontrer la similitude respective.

Or, les deux premiers triangles OAB, O′A′B′, semblables par construction, donnent

$$\frac{O'B'}{OB} = \frac{A'B'}{AB};$$

la similitude des polygones proposés donne à son tour

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC};$$

on a donc

$$\frac{O'B'}{OB} = \frac{B'C'}{BC}.$$

D'ailleurs, l'angle O′B′C′, différence des angles A′B′C′, A′B′O′, qui sont respectivement égaux aux angles ABC, ABO, est égal à l'angle OBC, différence de ces deux derniers. Donc les triangles OBC, O′B′C′, sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels.

De la similitude des triangles O′B′C′, OBC, on déduirait de même celle des triangles suivants O′C′D′, OCD; et ainsi de suite.

Scolies.

187. Deux points O et O′, situés dans le plan de deux polygones semblables, sont dits *homologues* lorsqu'en joignant l'un d'eux O aux extrémités d'un côté AB et l'autre O′ aux extrémités du côté homologue A′B′, on obtient deux triangles OAB, O′A′B′, semblables et semblablement disposés par rapport aux deux polygones.

Il résulte de la démonstration précédente que deux points homologues quelconques peuvent être pris pour centres de

décomposition de deux polygones semblables en triangles semblables et semblablement disposés.

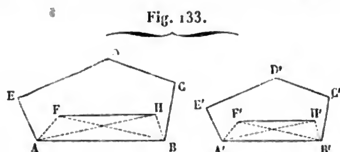
Si le point O était extérieur au polygone ABCDE, son homologue O′ serait aussi extérieur au polygone A′B′C′D′E′; il faudrait alors considérer les deux polygones comme composés de triangles additifs et de triangles soustractifs.

Si le point O coïncidait avec l'un des sommets A, son homologue O′ coïnciderait avec le sommet A′.

188. Deux droites situées dans le plan de deux polygones semblables sont dites *homologues*, lorsque leurs extrémités sont deux à deux des points homologues; telles sont, par exemple, les diagonales relatives à des sommets homologues.

Le rapport de deux droites homologues quelconques est égal au rapport de similitude des deux polygones.

Fig. 133.



Soient en effet ABCDE, A′B′C′D′E′ (*fig.* 133), deux polygones semblables, et FH, F′H′, deux droites homologues quelconques. La similitude (187) des triangles FAB, F′A′B′, prouve l'égalité des angles ABF, A′B′F′, et celle des rapports $\frac{F'B'}{FB}$, $\frac{A'B'}{AB}$. De même, la similitude des triangles HAB, H′A′B′, entraîne l'égalité des angles HBA, H′B′A′, et celle des rapports $\frac{H'B'}{HB}$, $\frac{A'B'}{AB}$. On a par suite

$$\frac{F'B'}{FB} = \frac{H'B'}{HB},$$

et

angle FBH ou HBA — FBA = angle F′B′H′ ou H′B′A′ — F′B′A′.

Donc les triangles FBH, F′B′H′, sont semblables (178), et le

rapport $\frac{FH}{F'H'}$ est égal à chacun des rapports égaux $\frac{F'B'}{FB}$, $\frac{A'B'}{AB}$, c'est-à-dire au rapport de similitude des deux polygones considérés.

THÉORÈME.

189. *Le rapport des périmètres de deux polygones semblables est égal à leur rapport de similitude.*

En effet, ABCDE, A'B'C'D'E' (*fig.* 133), étant deux polygones semblables, les rapports

$$\frac{AB}{A'B'},\quad \frac{BC}{B'C'},\quad \frac{CD}{C'D'},\quad \frac{DE}{D'E'},\quad \frac{EA}{E'A'},$$

sont tous égaux par définition (175) au rapport de similitude; donc, en vertu d'une propriété connue, la somme de leurs numérateurs et celle de leurs dénominateurs, c'est-à-dire les périmètres des polygones ABCDE, A'B'C'D'E', forment un rapport égal à chacun des précédents, c'est-à-dire au rapport de similitude.

THÉORÈME.

190. *Deux parallèles quelconques sont coupées en parties proportionnelles par une série de sécantes issues d'un même point.*

Soient AD, A'D', deux parallèles et une série de sécantes OAA', OBB', OCC', ODD', issues d'un point O placé, soit entre les deux parallèles (*fig.* 135), soit extérieurement (*fig.* 134); on a la suite de rapports égaux

$$(1)\qquad \frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}.$$

En effet, les triangles semblables OAB, OA'B' (176), donnent

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{OB'}{OB}.$$

De même, par les triangles semblables OBC, OB'C', on a

$$\frac{OB'}{OB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{OC'}{OC}.$$

Enfin, les triangles semblables OCD, OC′D′, donnent à leur tour

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{C'D'}{CD}.$$

En supprimant les rapports communs, on a la série de rapports égaux (1) qu'il fallait démontrer.

191. On voit, par la démonstration même, que cette série de rapports est encore égale à la suite

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD}.$$

En d'autres termes, *le rapport de deux parties correspondantes quelconques des deux parallèles est le même que celui des distances du point* O *aux deux points où l'une quelconque des sécantes rencontre les deux parallèles.*

Fig. 134.

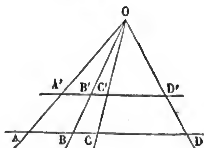
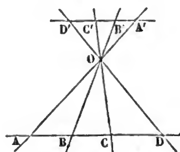


Fig. 135.



192. Réciproquement, *lorsque plusieurs sécantes* AA′, BB′, CC′, DD′, *coupent deux parallèles en parties proportionnelles, ces sécantes concourent en un même point* (*fig.* 134, 135).

Appelons $\frac{a}{b}$ le rapport de deux parties correspondantes quelconques des deux parallèles, de sorte qu'on ait

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \ldots = \frac{a}{b}.$$

1° Si les deux séries de points A, B, C, D, et A′, B′, C′, D′, présentent une disposition inverse l'une de l'autre (*fig.* 135), deux sécantes quelconques AA′ et CC′ se coupent en un point O

intérieur aux deux parallèles ; de plus, les triangles semblables OAC, OA′C′, donnent

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{a}{b}.$$

Ainsi, l'une quelconque CC′ des sécantes coupe la première d'entre elles AA′, en un point O situé entre A et A′ et tel que

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{a}{b}.$$

Toutes les sécantes concourent donc en ce point O (167).

2° Si les deux séries de points A, B, C, D, et A′, B′, C′, D′, sont disposées de la même manière (*fig.* 134), on verra de même qu'une sécante quelconque CC′ coupe la première AA′ en un point O situé hors de AA′ et tel que

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{a}{b}.$$

Toutes les sécantes concourent donc aussi en ce point O (167).

Lorsque le rapport $\frac{a}{b}$ est égal à l'unité, les parties correspondantes des deux parallèles sont égales entre elles, et les sécantes sont toutes parallèles. Le théorème énoncé subsiste donc, à la condition de regarder deux *parallèles* comme *deux droites qui concourent à l'infini.*

EXERCICES.

1. Si les trois côtés d'un triangle font respectivement avec les trois côtés d'un autre triangle des angles égaux, ces deux triangles sont semblables.

2. Inscrire dans un triangle ABC un triangle semblable à un triangle donné, et qui ait l'un de ses sommets en un point donné sur l'un des côtés du triangle ABC.

3. Trouver le lieu des points d'où l'on voit sous un même angle deux cercles donnés. — Trouver le point d'où l'on voit sous un même angle trois cercles donnés.

4. Étant donné un triangle ABC, mener à la base BC une parallèle DE telle, que la somme ou la différence des segments BD et CE déterminés sur les côtés AB et AC soit égale à une ligne donnée.

5. Un billard circulaire étant donné, dans quelle direction faut-il lancer

la bille pour qu'elle revienne au point de départ, après avoir frappé deux fois la bande?

6. Lieu des points dont les distances à deux droites données sont dans un rapport constant.

7. Inscrire dans un triangle donné un triangle semblable à un triangle donné, et qui soit minimum.

8. Circonscrire au système de trois cercles donnés un triangle semblable à un triangle donné, et qui soit maximum.

9. Inscrire dans un triangle donné trois cercles dont les rayons et les distances des centres soient dans un rapport donné, et qui forment un système minimum.

10. On donne un point A et une droite BC; trouver le lieu des points M qui divisent les sécantes AN menées du point à la droite, de manière qu'on ait

$$AM.AN = k^2.$$

11. On donne un triangle ABC rectangle en A; une perpendiculaire DE à l'hypoténuse coupe le côté BA en D, le côté CA en F; on mène les droites CD, BF, qui se coupent en M : lieu des points M.

12. CDE étant la tangente commune à deux circonférences et rencontrant la ligne des centres AB au point E, si l'on mène aux deux circonférences une sécante FGHKE, démontrer la relation

$$EC.ED = EF.EK = EG.EH.$$

13. Lorsque deux triangles ont deux angles égaux et deux angles supplémentaires chacun à chacun, les côtés de ces triangles respectivement opposés à ces angles sont proportionnels.

14. Soient dans un cercle le diamètre AB et la perpendiculaire AC à ce diamètre; si, par un point C quelconque de cette perpendiculaire, on mène au cercle une seconde tangente CD, la perpendiculaire DE, menée par le point de contact D au diamètre AB, est divisée en deux parties égales par la droite CB.

15. Dans tout triangle, la distance du centre du cercle circonscrit à l'un des côtés est égale à la moitié de la droite qui joint le sommet opposé au point de concours des hauteurs.

16. Si, des trois sommets d'un triangle et du point de rencontre de ses médianes, on abaisse des perpendiculaires sur un axe quelconque, la dernière perpendiculaire est la moyenne arithmétique des trois premières.

17. Étant donnés deux triangles et un point, mener par ce point une droite telle, que les sommes respectives des distances des sommets des deux triangles à cette droite soient dans un rapport donné $\frac{m}{n}$.

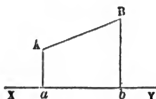
§ III.

Programme officiel : *Relations entre la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse, les segments de l'hypoténuse, l'hypoténuse elle-même et les côtés de l'angle droit. — Théorèmes relatifs au carré du nombre qui exprime la longueur du côté d'un triangle opposé à un angle droit, aigu ou obtus. — Théorème relatif aux sécantes du cercle issues d'un même point.*

DÉFINITIONS.

193. On appelle *projection* d'un point A sur une droite indéfinie XY le pied *a* de la perpendiculaire abaissée de ce point sur cette droite (*fig.* 136).

Fig. 136.



Si l'on considère une droite limitée AB, la projection de cette droite sur XY est l'intervalle *ab* qui sépare les projections de ses extrémités A et B.

194. On dit que deux droites, tracées entre les côtés d'un angle ou de son opposé par le sommet, sont *anti-parallèles*, lorsque la première fait avec l'un des côtés un angle égal à celui que la seconde fait avec l'autre côté.

Ainsi, les deux droites DE et BC (*fig.* 137) sont anti-parallèles par rapport à l'angle BAC, si l'angle ADE est égal à l'angle ACB. Alors l'angle AED, que la première droite forme avec le second côté AC, est égal à l'angle ABC que la seconde droite fait avec le premier côté AB (73).

THÉORÈME.

195. *Lorsque les deux côtés d'un angle sont coupés par deux droites anti-parallèles, le produit des distances du som-*

met aux deux points où chacun des côtés est rencontré par les deux transversales est constant (*fig.* 137).

Ainsi, BAC étant l'angle proposé et les deux droites BC et DE étant anti-parallèles, on a la relation

$$AB.AD = AC.AE.$$

En effet, prenons $AD' = AD$ et $AE' = AE$, et menons D'E'. L'égalité des triangles ADE, AD'E', qui ont un angle commun compris entre deux côtés égaux, entraîne celle des angles ADE, A'D'E'. D'ailleurs, les angles ADE, ACB, sont égaux par hypothèse (194); donc les angles correspondants AD'E', ACB, sont égaux, et les droites BC, D'E', sont parallèles (64); on a donc (169) la proportion

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AD'},$$

qui, lorsqu'on remplace les quantités AE' et AD' par les quantités égales AE et AD, devient

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} \quad \text{ou} \quad AB.AD = AC.AE.$$

Fig. 137.

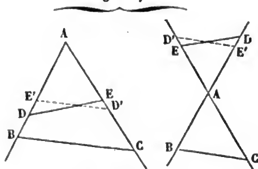
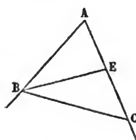


Fig. 138.



196. Réciproquement, *si deux droites* DE *et* BC, *tracées entre les côtés d'un angle* BAC, *sont telles, que le produit des distances du sommet aux deux points où elles coupent chacun des côtés soit constant*, c'est-à-dire sont telles qu'on ait

$$(1) \qquad AB.AD = AC.AE \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD},$$

ces droites sont anti-parallèles par rapport à cet angle.

En effet, concevons la droite qui, menée par le point E,

serait anti-parallèle à BC par rapport à l'angle BAC; cette droite couperait le côté AB en un point (195) dont la distance au sommet A serait une quatrième proportionnelle à AB, AE, AC. Or, la distance AD est précisément, en vertu de l'égalité (1), cette quatrième proportionnelle; donc la droite DE est anti-parallèle à BC.

COROLLAIRE.

197. Si les deux points D et B se confondaient (*fig.* 138), on aurait $\overline{AB}^2 = AC.AE$.

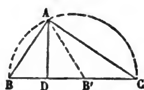
Donc, *lorsque deux droites anti-parallèles par rapport à un angle se coupent sur l'un des côtés de cet angle, la distance du sommet à ce point est moyenne proportionnelle entre les distances du sommet aux points où le second côté de l'angle coupe les deux anti-parallèles.*

RÉCIPROQUEMENT, *si par un point* B, *pris sur l'un des côtés d'un angle* BAC, *on mène dans l'intérieur de l'angle deux droites* BC, BE, *telles que* $\overline{AB}^2 = AC.AE$, *ces deux droites sont anti-parallèles par rapport à cet angle.*

THÉORÈME.

198. *Si du sommet* A *de l'angle droit d'un triangle rectangle* ABC, *on abaisse la perpendiculaire* AD *sur l'hypoténuse :* 1° *chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre l'hypoténuse et sa projection sur l'hypoténuse;* 2° *la*

Fig. 139.



perpendiculaire AD *est moyenne proportionnelle entre les deux segments* BD *et* CD *de l'hypoténuse* (*fig.* 139).

En effet :

1° Les droites AC et AD sont anti-parallèles par rapport à

l'angle B (194), puisqu'elles font un angle droit, l'une avec le côté BA, l'autre avec le côté BC. On a donc (197)

$$\overline{BA}^2 = BC.BD,$$

et l'on démontrerait de même la relation $\overline{CA}^2 = BC.CD$.

2° Les droites AC et AD étant anti-parallèles par rapport à l'angle B, les angles BAD et C sont égaux (194); par suite, si l'on amène le triangle ADB en ADB′ en le faisant tourner autour de AD, l'angle B′AD sera égal à l'angle C, et les deux droites AB′ et AC seront anti-parallèles par rapport à l'angle ADC. On aura donc

$$\overline{AD}^2 = B'D.CD \quad \text{ou} \quad \overline{AD}^2 = BD.DC.$$

Corollaire.

199. En joignant un point quelconque A d'une circonférence aux extrémités B et C d'un diamètre (*fig.* 139), on forme un triangle rectangle (133). De là, une nouvelle manière d'énoncer la proposition précédente :

1° *Toute corde* AB *d'un cercle est moyenne proportionnelle entre le diamètre* BC *qui passe par l'une de ses extrémités et sa projection* BD *sur ce diamètre ;*

2° *La perpendiculaire* AD *abaissée d'un point quelconque* A *d'une circonférence sur un diamètre* BC *est moyenne proportionnelle entre les deux segments* BD *et* CD *de ce diamètre.*

THÉORÈME.

200. *Les trois côtés d'un triangle rectangle étant évalués en nombres au moyen d'une unité commune, le carré du nombre qui mesure l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des nombres qui mesurent les deux côtés de l'angle droit;* ou plus brièvement, *dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.*

En effet, en ajoutant les deux relations (198, 1°):

$$\overline{AB}^2 = BC.BD, \quad \overline{AC}^2 = BC.CD,$$

on obtient

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC.(BD + CD) \quad \text{ou} \quad \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2.$$

COROLLAIRES.

201. Ce théorème, dû à Pythagore (580 av. J. C.), permet de calculer l'un des côtés d'un triangle rectangle quand on connaît les deux autres.

Si l'on connaît les deux côtés b et c de l'angle droit, l'hypoténuse a résulte de la formule

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad \text{d'où} \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Ainsi, soient $b = 3$, $c = 4$, on a $a = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Si l'on connaît l'hypoténuse a et l'un des côtés b de l'angle droit, on trouve l'autre côté c par la formule

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad \text{d'où} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Ainsi, pour $a = 5$ et $b = 3$, on a $c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$.

THÉORÈME.

202. *Dans tout triangle, le carré d'un côté opposé à un angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins deux fois le produit de l'un de ces côtés par la projection du second sur le premier.*

Fig. 140.

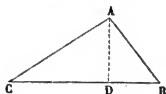
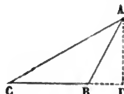


Fig. 141.



Soient ABC le triangle proposé, C un angle aigu et CD la projection du côté AC sur CB; il s'agit de démontrer la relation

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC.CD.$$

Deux cas peuvent se présenter, suivant que la perpendiculaire AD tombe à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle ABC; le premier cas a lieu lorsque l'angle ABC est aigu, et le second lorsque l'angle ABC est obtus (42).

Dans le premier cas (*fig.* 140), le triangle rectangle ABD donne

$$(1) \qquad \overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2.$$

Or, puisque le point D est, par hypothèse, situé entre C et B, on a

$$BD = BC - CD,$$

et, par suite, d'après un théorème connu d'Arithmétique (*),

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2BC.CD.$$

En portant cette valeur de $\overline{BD}^2$ dans la relation (1), on trouve

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 - 2BC.CD;$$

et, comme le triangle rectangle ACD donne

$$\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2,$$

on a finalement

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC.CD.$$

Dans le second cas (*fig.* 141), la démonstration est la même. Il est vrai que, au lieu de

$$BD = BC - CD, \quad \text{on a} \quad BD = CD - BC;$$

mais comme, en vertu du théorème d'Arithmétique cité, le carré de BD n'est pas changé, et que c'est ce carré seul qui figure dans la démonstration, on voit que tout le raisonnement subsiste.

THÉORÈME.

203. *Si l'un des angles d'un triangle est obtus, le carré du côté opposé à cet angle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, plus deux fois le produit de l'un de ces côtés par la projection du second sur le premier* (*fig.* 142).

Soient ABC le triangle proposé, C l'angle obtus, et CD la pro-

(*) Le carré de la différence de deux nombres est égal au carré du premier nombre, plus le carré du second, moins le double produit de ces deux nombres.

jection de AC sur BC; il s'agit de démontrer la relation

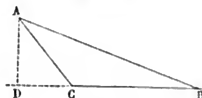
$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC.CD.$$

Le triangle rectangle ABD donne

$$(1) \qquad \overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2.$$

Or, puisque l'angle ACB est obtus, la perpendiculaire AD

Fig. 142.



tombe hors du triangle (42), et le point D est extérieur à BC; on a donc

$$BD = BC + CD,$$

et, par suite, en vertu d'un théorème connu d'Arithmétique (*),

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2BC.CD.$$

En substituant cette valeur de $\overline{BD}^2$ dans la relation (1), on trouve

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 + 2BC.CD,$$

et comme le triangle rectangle ACD donne

$$\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2,$$

on a finalement

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC.CD.$$

Corollaires.

204. Il résulte des trois théorèmes précédents que, *dans un triangle, le carré d'un côté est inférieur, égal ou supérieur à la somme des carrés des deux autres, suivant que l'angle*

(*) Le carré de la somme de deux nombres est égal au carré du premier, plus le carré du second, plus le double produit de ces deux nombres.

opposé à ce côté est aigu, droit ou obtus; donc, réciproquement (39), *un angle d'un triangle est aigu, droit ou obtus, suivant que le carré du côté opposé à cet angle est inférieur, égal ou supérieur à la somme des carrés des deux autres côtés.*

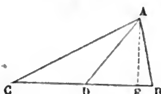
Par exemple, si $a=5$, $b=4$, $c=3$, l'angle A est droit et le triangle est rectangle, puisque $25=16+9$. De même, si $a=11$, $b=9$, $c=8$, l'angle A est aigu, puisque 11^2 ou 121 est moindre que 9^2+8^2, c'est-à-dire que $81+64=145$.

THÉORÈME.

205. *Dans tout triangle* ABC (*fig.* 143) :

1° *La somme des carrés de deux côtés* AC *et* AB *est égale à*

Fig. 143



deux fois le carré de la médiane AD *relative au troisième côté* BC, *plus deux fois le carré de la moitié de ce troisième côté ;*

2° *La différence des carrés de deux côtés* AC *et* AB *est égale à deux fois le produit du troisième côté* BC *par la projection* DE *sur ce côté de la médiane correspondante* AD.

En effet, l'angle ADB étant aigu, on a dans le triangle ADB (202)

$$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-2BD.DE.$$

L'angle ADC étant obtus, on a dans le triangle ACD (203)

$$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2+2CD.DE.$$

En ajoutant et retranchant ces deux égalités et observant que $CD=BD$, on trouve

$$(1)\qquad \overline{AC}^2+\overline{AB}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2,$$

$$(2)\qquad \overline{AC}^2-\overline{AB}^2=2BC.DE.$$

COROLLAIRES.

206. Si, les points B et C restant fixes, le sommet A se déplace de manière que la somme $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ reste constante, la relation (1) montre que la valeur AD de la médiane ne change pas. Donc, *le lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux points fixes est constante est une circonférence ayant pour centre le milieu de la droite qui unit les deux points fixes.*

Si, les points B et C restant fixes, le sommet A se déplace de manière que la différence $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$ reste constante, la relation (2) prouve que la projection DE de la médiane AD ne change pas, c'est-à-dire que le point mobile A se projette toujours au même point E de BC. Donc, *le lieu des points dont la différence des carrés des distances à deux points fixes est constante, est une droite perpendiculaire à celle qui unit les deux points fixes.*

THÉORÈME.

207. *Si, d'un point pris dans le plan d'un cercle, on mène des sécantes, le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection de chaque sécante avec la circonférence est constant, quelle que soit la direction de la sécante.*

Ainsi, soient deux sécantes issues du point fixe E; la première coupe le cercle aux points A et B, la seconde aux points C et D : il s'agit de démontrer qu'on a

$$EA.EB = EC.ED.$$

La figure peut se présenter de deux manières, suivant que le point E est intérieur (*fig.* 144) ou extérieur au cercle (*fig.* 145); mais la démonstration est la même dans les deux cas.

Menons les cordes AC et BD; les angles ACD, ABD, étant inscrits dans le même segment, sont égaux, et par suite les cordes AC, BD, sont anti-parallèles par rapport à l'angle AED. On a donc (195) la relation

$$EA.EB = EC.ED.$$

208. Réciproquement, *lorsque deux droites* AB *et* CD, *prolongées, s'il le faut, concourent en un point* E *tel qu'on ait la relation*

$$EA.EB = EC.ED,$$

les extrémités A, B, C, D, *sont situées sur une même circonférence.*

En effet, d'après le n° 196, la relation donnée prouve que les deux droites AC et BD sont anti-parallèles par rapport à l'angle AED; par suite, les angles ACD, DBA, sont égaux, et si sur la droite AD on décrit un segment capable de l'angle ACD, la circonférence qui passe par les trois points A, C, D, renfermera le point B.

Fig. 144.

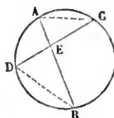


Fig. 145.

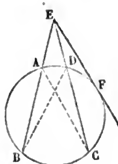
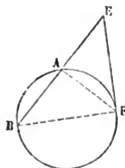


Fig. 146.



Corollaire.

209. Reprenons le cas où le point E est extérieur (*fig.* 145), et supposons que la sécante EDC tourne autour du point E jusqu'à ce qu'elle coïncide avec la tangente EF; la sécante entière EC et sa partie extérieure ED deviendront l'une et l'autre égales à la longueur EF de la tangente, et la relation

$$EA.EB. = EC.ED,$$

prise à la limite, sera

$$EA.EB = \overline{EF}^2.$$

Donc, *si, par un point extérieur à un cercle, on mène une sécante et une tangente, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.*

On peut d'ailleurs appliquer directement à ce cas particulier la démonstration du cas général : les angles EBF, AFE (*fig.* 146), l'un inscrit, l'autre formé par une tangente et une

corde, ont l'un et l'autre pour mesure la moitié de l'arc AF; l'égalité de ces angles prouve l'anti-parallélisme des droites AF et BF par rapport à l'angle E, et par suite (197) entraîne la relation

$$\overline{EF}^2 = EA.EB.$$

210. Réciproquement, *si trois points* A, B, F, *situés, les deux premiers* A *et* B *sur un côté de l'angle* E, *et le troisième* F *sur l'autre côté, sont tels qu'on ait la relation*

$$\overline{EF}^2 = EA.EB,$$

la circonférence qui passe par ces trois points est tangente en F *au côté* EF.

En effet, d'après le n° 197, la relation donnée prouve l'anti-parallélisme des droites AF et BF par rapport à l'angle E; les angles AFE, EBF, sont donc égaux; par suite, si l'on décrit une circonférence passant par A et F et tangente en F à la droite EF, cette circonférence, d'après la construction connue du segment capable (161), passera par le point B.

EXERCICES.

1. Dans tout quadrilatère, la somme des carrés des quatre côtés est égale à la somme des carrés des deux diagonales, plus quatre fois le carré de la droite qui unit les milieux de ces diagonales. — Application au parallélogramme.

2. Dans tout quadrilatère inscriptible :

1° Le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés;

2° Le rapport des diagonales est égal au rapport de la somme des produits des côtés qui aboutissent aux extrémités de la première diagonale à la somme des produits des côtés qui aboutissent aux extrémités de la seconde.

3. Le produit de deux côtés d'un triangle est égal :

1° Au carré de la bissectrice de leur angle, augmenté du produit des deux segments que cette bissectrice détermine sur le troisième côté;

2° Au produit des deux segments soustractifs que la bissectrice de leur angle extérieur détermine sur le troisième côté, diminué du carré de cette bissectrice;

3° Au produit du diamètre du cercle circonscrit au triangle par la hauteur relative au troisième côté.

4. Étant donnés les trois côtés d'un triangle, calculer :

1° Ses hauteurs; 2° ses médianes; 3° les bissectrices de ses angles intérieurs ou extérieurs; 4° le rayon du cercle circonscrit.

5. Dans tout quadrilatère, la somme des carrés des diagonales est le double de la somme des carrés des droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

6. Soit G le point de rencontre des médianes d'un triangle ABC; démontrer la relation

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 3\left(\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2\right).$$

— En déduire le rapport de la somme des carrés des côtés d'un triangle à la somme des carrés de ses médianes.

7. Soient G le point de rencontre des médianes d'un triangle ABC, et M un point quelconque pris dans son plan; démontrer la relation

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 + 3\overline{MG}^2.$$

8. Étant donné un triangle ABC, trouver le lieu des points dont la somme des carrés des distances aux trois sommets du triangle est constante et égale à un carré donné k^2.

9. La somme des carrés des diagonales d'un trapèze est égale à la somme des carrés des côtés non parallèles, plus deux fois le produit des bases.

10. Étant donnés un point A et un cercle O, on mène à ce cercle par le point A une sécante ABC sur laquelle on prend un point M tel qu'on ait $AM.AC = k^2$; trouver le lieu décrit par le point M, quand la sécante ABC tourne autour du point A.

11. Deux droites se coupent à angle droit dans un cercle ou hors d'un cercle; démontrer que la somme des carrés des deux droites opposées qui unissent leurs points d'intersection avec la circonférence, est égale au carré du diamètre, ainsi que la somme des carrés des quatre segments des deux droites.

12. Si, dans le problème précédent, AB et CD sont les cordes interceptées par la circonférence O sur les deux droites données qui se coupent perpendiculairement en E, on a

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + 4\overline{OE}^2 = 8\overline{OA}^2.$$

13. Quatre points étant sur une même circonférence, dans chacun des triangles formés par ces quatre points pris trois à trois, existe un point de rencontre des hauteurs : démontrer que ces quatre points de rencontre sont sur une même circonférence égale à la première.

§ IV.

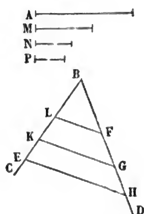
Programme officiel : *Problèmes : Diviser une droite donnée en parties égales ou proportionnelles à des longueurs données. — Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données, une moyenne proportionnelle entre deux lignes données. — Mener une tangente commune à deux cercles. — Construire, sur une droite donnée, un polygone semblable à un polygone donné.*

PROBLÈME.

211. *Diviser une droite* A *en parties proportionnelles à des droites données* M, N, P, *ou en un certain nombre de parties égales.*

Après avoir tracé un angle CBD de grandeur convenable (*fig.* 147), prenez sur le côté BC une longueur BE égale à A,

Fig. 147.



et sur le côté BD des longueurs BF, FG, GH, respectivement égales à M, N, P. Tirez HE, et menez FL, GK, parallèles à HE. La droite BE ou A sera ainsi divisée aux points L et K en parties proportionnelles à M, N, P. On a en effet (168)

$$\frac{BL}{BF}=\frac{LK}{FG}=\frac{KE}{GH} \quad \text{ou} \quad \frac{BL}{M}=\frac{LK}{N}=\frac{KE}{P}.$$

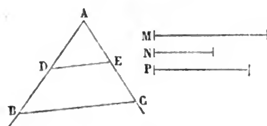
212. Si l'on devait partager A proportionnellement à des nombres donnés m, n, p, on représenterait ces nombres par des droites M, N, P, en adoptant une certaine longueur comme unité, et l'on retomberait sur la question précédente.

213. Enfin, le procédé graphique que nous venons d'indiquer permet aussi de diviser une droite A en parties égales; il suffit évidemment de supposer M, N, P quelconques, mais égales entre elles; ce qui revient à porter sur BD des longueurs BF, FG, GH, égales entre elles, et à mener par F et G des parallèles à HE.

PROBLÈME.

214. *Trouver la quatrième proportionnelle à trois droites données* M, N, P.

Fig. 148.



Après avoir tracé un angle BAC de grandeur convenable, prenez sur le côté AB des longueurs AB et AD respectivement égales à M et à N, et sur le côté AC une longueur AC égale à P; tirez BC et menez DE parallèle à BC; AE sera la quatrième proportionnelle cherchée. On a, en effet (169),

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad \text{ou} \quad \frac{M}{N} = \frac{P}{AE}.$$

SCOLIE.

215. Si les droites N et P étaient égales, AE serait la troisième proportionnelle à M et à N.

PROBLÈME.

216. *Construire la moyenne proportionnelle entre deux droites données* A *et* B.

1° Prenez, à la suite l'une de l'autre (*fig.* 149), sur une droite indéfinie, deux longueurs CD et DE respectivement égales à A et à B. Sur CE comme diamètre, décrivez une circonférence, et par le point D élevez DF perpendiculaire à CE. La droite DF sera (199) la moyenne proportionnelle entre CD et DE, c'est-à-dire entre A et B.

2° Lorsque les droites données A et B sont un peu grandes, on préfère le procédé suivant : prenez sur une droite indéfinie (*fig.* 150), et à partir du même point C, deux lon-

Fig. 149.

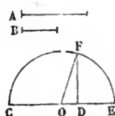
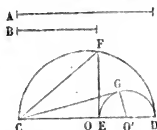


Fig. 150.



gueurs CD et CE respectivement égales à A et à B ; sur CD, comme diamètre, décrivez une circonférence, et élevez EF perpendiculaire à CD ; enfin tirez FC. La corde FC sera la moyenne proportionnelle entre CD et CE, c'est-à-dire entre A et B.

3° On pourrait aussi, après avoir pris CD et CE égales à A et à B (*fig.* 150), décrire une circonférence quelconque passant par E et D, par exemple la circonférence dont ED est le diamètre, puis mener la tangente CG à cette circonférence. Cette tangente (209) serait la moyenne proportionnelle entre CD et CE, c'est-à-dire entre A et B. Toutefois, au point de vue graphique, ce procédé est inférieur au précédent, et il convient de ne l'employer que lorsqu'on veut relier la construction à une autre figure qui contient déjà plusieurs des lignes dont ce procédé exige le tracé.

PROBLÈME.

217. *Mener une tangente commune à deux cercles* (*fig.* 151).

Soient les deux cercles C et C′ de rayons R et R′, et supposons pour fixer les idées $R > R'$. AA′ étant une tangente commune extérieure qui coupe la ligne des centres en O, au delà de CC′, les rayons CA, C′A′, sont parallèles et de même sens, et l'on a

$$(1) \qquad \frac{OC}{OC'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{R}{R'}.$$

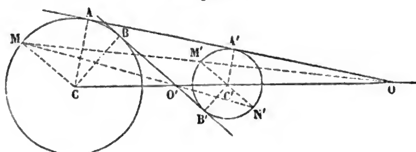
Or, toute droite MM′ qui unit les extrémités de deux rayons parallèles et de même sens CM et C′M′, coupe également la

ligne des centres en un point O_1 situé au delà de CC', et tel que

$$\frac{O_1C}{O_1C'} = \frac{CM}{C'M'} = \frac{R}{R'}.$$

Les deux points O et O_1 se confondent donc (167).

Fig. 151.



De même, BB' étant une tangente commune intérieure qui coupe la ligne des centres en O' entre C et C', les rayons CB, C'B', sont parallèles et de sens contraires, et l'on a

$$(2) \qquad \frac{O'C}{O'C'} = \frac{CB}{C'B'} = \frac{R}{R'}.$$

Or, toute droite MN' qui unit les extrémités de deux rayons parallèles et de sens contraires CM, C'N', coupe également la ligne des centres en un point O'_1 situé entre C et C', et tel que

$$\frac{O'_1C}{O'_1C'} = \frac{CM}{C'N'} = \frac{R}{R'}.$$

Les deux points O' et O'_1 se confondent donc (167).

De là résulte la construction suivante : Menez dans le premier cercle un rayon quelconque CM, et dans le second le diamètre M'N' parallèle à CM ; tirez MM' et MN', et des points O et O', où ces droites coupent la ligne des centres, menez des tangentes à l'un des cercles; elles toucheront également l'autre cercle.

Il y aura deux tangentes communes extérieures, tant que le point O sera situé hors du cercle C. La relation (1), mise sous la forme

$$\frac{OC}{OC - OC'} = \frac{R}{R - R'} \quad \text{ou} \quad OC = \frac{CC'}{R - R'} \cdot R,$$

montre que, pour que OC soit plus grand que R, il faut et il suffit que la distance CC' des centres soit plus grande que la

différence R — R′ des rayons, c'est-à-dire que les deux cercles ne soient ni intérieurs l'un à l'autre, ni tangents intérieurement. Quand les deux cercles sont tangents intérieurement, on a $CC' = R - R'$, par suite $OC = R$, et le point O n'est autre que le point de contact des deux cercles; il n'y a alors qu'une tangente commune extérieure.

De même, pour qu'il y ait deux tangentes communes intérieures, il faut que le point O′ soit extérieur au cercle C. La relation (2), mise sous la forme

$$\frac{O'C}{O'C + O'C'} = \frac{R}{R + R'} \quad \text{ou} \quad O'C = \frac{CC'}{R + R'} \cdot R,$$

montre que, pour que O′C soit plus grand que R, il faut et il suffit que la distance CC′ des centres soit plus grande que la somme $R + R'$ des rayons, c'est-à-dire que les deux cercles soient extérieurs l'un à l'autre. Quand les deux cercles sont tangents extérieurement, on a $CC' = R + R'$, par suite $O'C = R$, et le point O′ n'est autre que le point de contact des deux cercles; il n'y a dans ce cas qu'une tangente commune intérieure.

Fig. 152.

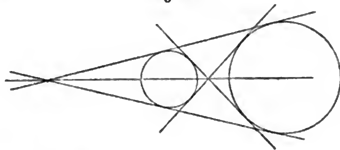
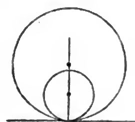


Fig. 153.



En résumé :

Deux cercles extérieurs (*fig.* 152) ont *quatre* tangentes communes, deux extérieures, deux intérieures.

Fig. 154.

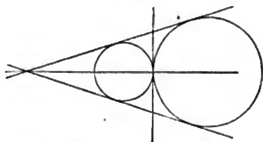
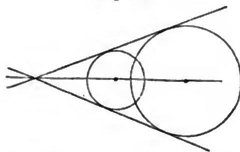


Fig. 155.



Deux cercles tangents extérieurement (*fig.* 154) ont *trois* tangentes communes, deux extérieures, une intérieure.

Deux cercles sécants (*fig.* 155) ont *deux* tangentes communes qui sont extérieures.

Deux cercles tangents intérieurement (*fig.* 153) ont *une* seule tangente commune, qui est extérieure. Deux cercles intérieurs l'un à l'autre n'ont point de tangente commune.

Nous avons supposé les deux cercles inégaux. Si l'on avait $R = R'$, les formules précédentes deviendraient

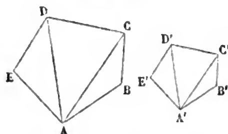
$$OC = R.\frac{CC'}{0} = \infty, \quad O'C = \frac{CC'}{2}.$$

Le point O s'éloignant indéfiniment sur la ligne des centres, les tangentes communes extérieures seraient parallèles à cette ligne ; et quant aux tangentes communes intérieures, elles se couperaient au milieu de la ligne des centres.

PROBLÈME.

218. *Construire sur une droite donnée : 1° un triangle semblable à un triangle donné ; 2° un polygone semblable à un polygone donné* (*fig.* 156).

Fig. 156.



1° Pour construire sur la droite A'B', considérée comme l'homologue de AB, un triangle semblable au triangle ABC, faites un angle B'A'C' égal à l'angle BAC et un angle A'B'C' égal à l'angle ABC. Le triangle A'B'C' ainsi obtenu et le triangle donné ABC seront semblables comme ayant deux angles égaux chacun à chacun (178).

2° Pour construire, sur la droite A'B' considérée comme l'homologue de AB, un polygone semblable au polygone ABCDE, décomposez ce dernier polygone en triangles, en menant par l'un des sommets A les diagonales AC, AD. Construisez alors sur A'B' un triangle A'B'C' semblable au triangle ABC, puis sur A'C' un triangle A'C'D' semblable au triangle ACD, enfin

sur A′D′ un triangle A′D′E′ semblable au triangle ADE. Le polygone A′B′C′D′E′ ainsi obtenu et le polygone donné ABCDE seront semblables comme composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés (185).

219. Si, au lieu de donner un côté A′B′ du polygone demandé, on donne le rapport de similitude $\frac{m}{n}$ des deux polygones, on appliquera la solution précédente, en construisant préalablement une droite A′B′ dont le rapport à AB soit égal à $\frac{m}{n}$ (214).

Scolie.

220. Parmi les procédés généraux qui servent à la résolution des problèmes, il importe de signaler celui qui consiste à construire une figure semblable à la figure cherchée avec des éléments pris parmi les données; on passe ensuite de cette figure auxiliaire à la figure demandée, en comparant deux éléments homologues des deux figures.

Fig. 157.

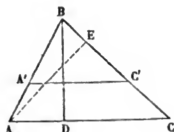
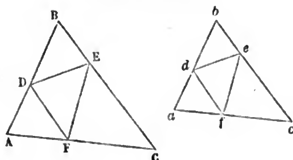


Fig. 158.



Soit proposé, par exemple, de *construire un triangle* ABC *dont on donne les trois hauteurs* α, β, γ (*fig.* 157); a, b, c, étant les côtés du triangle inconnu, et BD et AE étant les hauteurs β et α, les triangles semblables CBD, CAE, donnent:

$$\frac{a}{\beta}=\frac{b}{\alpha}.$$

On a de même

$$\frac{a}{\gamma}=\frac{c}{\alpha},$$

et, par suite,

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{\alpha} = \frac{c}{\frac{\alpha 6}{\gamma}}.$$

Si donc on construit un triangle A′BC′ ayant pour côtés

$$BC' = 6, \quad A'C' = \alpha, \quad A'B = \frac{\alpha 6}{\gamma},$$

ce triangle sera semblable au triangle cherché ABC, et pour avoir ce dernier triangle, il suffira de prendre sur la hauteur issue du sommet B une longueur BD = 6, puis de mener par le point D la parallèle AC à A′C′.

A ce procédé s'en rattache un autre, qui consiste à renverser l'énoncé du problème à résoudre, c'est-à-dire à prendre les données pour inconnues, et réciproquement. En résolvant cette nouvelle question, on construit une figure semblable à celle que l'on cherche, et si l'on connaît alors une seule ligne de cette dernière, il est facile de la construire elle-même. Soit proposé, par exemple, d'*inscrire dans un triangle donné* ABC *un triangle ayant ses côtés parallèles à ceux d'un second triangle donné def* (*fig.* 158). On commencera par circonscrire au triangle *def* un triangle *abc* ayant ses côtés respectivement parallèles à ceux du triangle ABC. La figure ainsi formée sera semblable à la figure cherchée, et il suffira de partager le côté AB dans le rapport de *db* à *da* pour avoir le sommet D du triangle demandé.

EXERCICES.

1. Mener par un point donné, entre deux droites données, une droite telle, que le point donné la partage dans un rapport donné $\frac{m}{n}$.

2. Déterminer hors d'un cercle un point tel, que la somme des deux tangentes menées au cercle par ce point soit égale à la sécante entière qui passe par ce point et le centre du cercle.

3. Inscrire dans un triangle un rectangle dont le rapport des côtés soit donné.

4. Étant donnés une circonférence et un point, mener par le point une sécante qui soit divisée par cette circonférence dans un rapport donné.

5. On donne deux cercles qui se coupent; mener par un de leurs points d'intersection une sécante telle, que le produit des deux cordes interceptées soit égal à un carré donné.

6. Inscrire dans un triangle un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné.

7. Construire un triangle, connaissant sa base, la somme ou la différence des deux autres côtés, et sachant que son troisième sommet est situé sur une droite donnée.

8. Construire un triangle, connaissant un côté, un angle et le rapport des deux autres côtés.

9. On donne trois points A, B, C; mener par le point A une droite telle, que les perpendiculaires abaissées sur elle des points B et C aient leurs pieds à des distances du point A qui soient dans un rapport donné.

10. Construire un carré, connaissant la somme ou la différence de sa diagonale et de son côté.

11. Étant données deux droites qu'on ne peut prolonger, mener par un point donné une droite qui aille passer par le point de concours inconnu des deux premières.

12. Mener par le point d'intersection de deux circonférences une sécante telle, que les cordes interceptées sur elle par les deux circonférences soient dans un rapport donné.

13. Décrire une circonférence passant par deux points donnés et tangente, soit à une droite donnée, soit à une circonférence donnée.

14. Par un point donné, faire passer une circonférence qui touche deux droites données.

15. Par un point donné, faire passer une circonférence tangente à deux circonférences données.

16. Par un point donné, faire passer une circonférence tangente à une droite et à une circonférence données.

17. Construire une circonférence tangente à deux droites données et à une circonférence donnée.

18. Construire une circonférence tangente à une droite donnée et à deux circonférences données.

§ V.

Programme officiel : *Polygones réguliers. — Leur inscription dans le cercle : carré, hexagone. — Moyen d'évaluer le rapport approché de la circonférence au diamètre.*

DÉFINITIONS.

221. Un polygone est dit *régulier*, lorsqu'il a tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux. Tels sont, par exemple, le triangle équilatéral et le carré.

On nomme *ligne brisée régulière* toute ligne brisée convexe qui a ses côtés égaux et ses angles égaux.

THÉORÈME.

222. *On peut toujours inscrire ou circonscrire à une circonférence donnée un polygone régulier d'un nombre donné de côtés.*

Fig. 159.

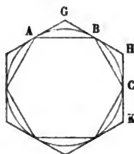
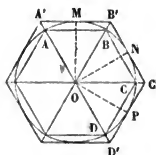


Fig. 160.



Supposons la circonférence divisée en n parties égales, n étant le nombre de côtés que doit avoir le polygone.

1° En menant (*fig.* 159) les cordes AB, BC,..., qui unissent les points de division, on aura un polygone régulier inscrit de n côtés. En effet, les côtés de ce polygone sont égaux comme cordes d'arcs égaux; et ses angles sont égaux, comme inscrits dans des segments égaux, car tout angle ABC du polygone est inscrit dans un segment correspondant à deux divisions consécutives de la circonférence.

2° En menant des tangentes (*fig.* 159) par les points de division A, B, C,..., on aura un polygone régulier circonscrit

de *n* côtés. En effet, dans les triangles GAB, HBC,..., les côtés AB, BC,..., sont égaux, et les angles en A, B, C,..., formés par une tangente et une corde, sont aussi égaux comme ayant tous pour mesure la moitié d'une division de la circonférence; dès lors les triangles GAB, HBC,..., sont isocèles et égaux, et l'on a d'une part G = H = K = ..., et de l'autre AG = GB = BH = HC = CK,..., d'où l'on déduit GH = HK =... Ainsi le polygone GHK... a ses angles égaux et ses côtés égaux.

D'après cette démonstration, pour avoir le polygone régulier de *n* côtés circonscrit à un cercle, il suffit de diviser la circonférence en *n* parties égales et de mener des tangentes par les points de division. Or, les milieux M, N, P,..., des arcs AB, BC, CD,..., qui sous-tendent les côtés du polygone régulier inscrit (*fig.* 160), divisent évidemment la circonférence en *n* parties égales. On aura donc un polygone régulier circonscrit de *n* côtés en menant des tangentes par ces points. On préfère souvent cette seconde manière d'opérer, parce que le polygone A′B′C′D′..., ainsi obtenu, a ses côtés parallèles à ceux du polygone inscrit ABCD..., et ses sommets A′, B′, C′,..., sur les mêmes rayons OAA′, OBB′,..., que les sommets du polygone ABCD.... En effet, d'une part deux côtés, tels que BC, B′C′, sont parallèles comme perpendiculaires sur la même droite ON, et d'autre part deux tangentes, telles que MB′, NB′, doivent se couper (157) sur la bissectrice OB de l'angle MON.

223. Réciproquement, *on peut toujours inscrire et circonscrire une circonférence à un polygone régulier donné.*

Soit ABCDEF le polygone régulier donné (*fig.* 161).

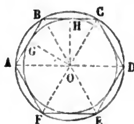
1° Pour démontrer qu'on peut circonscrire une circonférence à ce polygone, il suffit de prouver que la circonférence qui passe par trois sommets consécutifs quelconques A, B, C, passe par le sommet suivant D. Or, soit O le centre du cercle déterminé par les trois points A, B, C; menons OA, OD, et la perpendiculaire OH sur BC. Replions le quadrilatère ABHO autour de OH; les angles en H étant droits, BH prendra la direction HC, et le point B tombera en C, puisque BH = HC. Mais le polygone étant régulier, l'angle ABH est égal à l'an-

10.

gle HCD, comme le côté BA au côté CD; par suite, le côté BA prendra la direction CD, et le point A tombera en D. Donc OD est égal au rayon OA, et la circonférence considérée passe par le point D.

2° Les côtés AB, BC,..., étant des cordes égales du cercle circonscrit, les perpendiculaires OH, OG,..., abaissées du centre O sur ces cordes, seront égales (100); donc, si du point O comme centre, avec OH pour rayon, on décrit une circonférence, chacun des côtés du polygone sera touché en son milieu par cette circonférence, qui dès lors sera inscrite au polygone.

Fig. 161.



COROLLAIRES.

224. On nomme *centre* d'un polygone régulier le centre commun O de la circonférence inscrite et de la circonférence circonscrite. Ce point, étant à égale distance de tous les côtés et de tous les sommets, est à la fois le point de concours des bissectrices de tous les angles et des perpendiculaires élevées sur les milieux des divers côtés.

On appelle *rayon* d'un polygone régulier le rayon du cercle circonscrit, et *apothème* de ce polygone le rayon du cercle inscrit.

On nomme *angle au centre* d'un polygone régulier l'angle AOB de deux rayons consécutifs; cet angle est évidemment égal à l'angle GOH de deux apothèmes consécutifs, et, par conséquent, est le supplément de l'angle GBH du polygone régulier. D'après cela, si n est le nombre des côtés du polygone, et si l'on prend l'angle droit pour unité, l'angle au centre vaudra $\frac{4}{n}$, et l'angle du polygone $2 - \frac{4}{n}$. On voit ainsi que, sauf le triangle équilatéral dont les angles sont de 60 degrés, et le carré dont les angles sont droits, tous les polygones réguliers ont leur angle obtus.

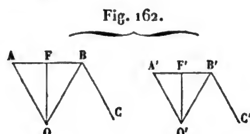
225. On prouverait, par des raisonnements identiques aux précédents, que toute ligne brisée régulière est inscriptible et circonscriptible, et, par suite, qu'elle a un centre, un apothème et un rayon qui sont le centre et les rayons des circonférences inscrite et circonscrite. Une ligne brisée régulière ne diffère d'une portion de polygone régulier qu'en ce que son angle au centre n'est pas forcément une partie aliquote de quatre angles droits.

THÉORÈME.

226. 1° *Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables.*

2° *Leur rapport de similitude est égal à celui de leurs rayons ou de leurs apothèmes.*

Fig. 162.



En effet :

1° Ces polygones ont les angles égaux, puisque la valeur de l'angle d'un polygone régulier ne dépend que du nombre des côtés (224), et que le nombre des côtés est le même dans les deux figures ; de plus, les côtés sont évidemment proportionnels, puisque, dans l'une et l'autre figure, ils sont égaux. Donc, les polygones considérés sont semblables.

2° Soient (*fig.* 162) AB le côté du premier polygone, O son centre, OB son rayon, OF son apothème ; soient de même A'B' le côté du second polygone, O' son centre, O'B' son rayon et O'F' son apothème. Les triangles rectangles AFO, A'F'O', sont semblables (180), puisque les angles FAO, F'A'O', sont égaux comme moitiés des angles égaux ABC, A'B'C' (224). On a donc

$$\frac{AF}{A'F'} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{OF}{O'F'};$$

mais les polygones proposés étant semblables, leur rapport de

similitude est égal au rapport des côtés AB, A′B′, ou des demi-côtés AF, A′F′; il est donc aussi égal au rapport des rayons OB, O′B′, ou au rapport des apothèmes OF, O′F′.

Corollaire.

227. *Le rapport de deux circonférences quelconques est égal au rapport de leurs rayons.*

On appelle *longueur d'un arc de cercle* la limite vers laquelle tend le périmètre d'une ligne brisée régulière inscrite dans cet arc, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre de ses côtés (*).

En particulier, on appelle *longueur d'une circonférence* la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone régulier inscrit dont le nombre des côtés croît indéfiniment.

Cela posé, soient R et R′ les rayons, et C et C′ les longueurs de deux circonférences; inscrivons dans la première un polygone régulier quelconque et, dans la seconde, un polygone régulier d'un même nombre de côtés. P et P′ étant les périmètres de ces polygones, on aura (226)

$$\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'}.$$

Cette proportion, ayant lieu quel que soit le nombre des côtés des deux polygones, subsistera quand on fera croître ce nombre indéfiniment; mais alors les périmètres P et P′ tendront vers leurs limites respectives C et C′, et leur rapport tendra vers $\frac{C}{C'}$. On aura donc, à la limite,

$$\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}.$$

228. La proposition précédente donne

$$\frac{C}{R} = \frac{C'}{R'} \quad \text{ou} \quad \frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}.$$

(*) Pour justifier cette définition, il faudrait prouver que cette limite existe, et qu'elle est unique, c'est-à-dire indépendante de la loi suivant laquelle on fait croître le nombre des côtés (*voir* pour cette démonstration notre *Traité de Géométrie*).

Donc, le rapport d'une circonférence à son diamètre est le même pour toutes les circonférences ; en d'autres termes :

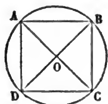
Le rapport de la circonférence au diamètre est un nombre constant.

Ce nombre, qu'on représente ordinairement par π, est incommensurable ; on ne peut donc pas l'avoir exactement ; mais on peut le calculer, comme nous le montrerons bientôt, avec telle approximation qu'on veut.

PROBLÈME.

229. *Inscrire un carré dans un cercle donné* (*fig.* 163).

Fig. 163.



Il suffit évidemment de mener deux diamètres AC et BD perpendiculaires entre eux, et de joindre leurs extrémités, pour avoir le carré demandé ABCD.

Le triangle AOB, rectangle en O, donne

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 2\overline{OA}^2, \quad \text{d'où} \quad AB = OA.\sqrt{2}.$$

Ainsi, *le côté du carré inscrit dans le cercle de rayon* R *est égal à* $R\sqrt{2}$.

Il convient de remarquer que l'apothème du carré inscrit est égal à la moitié de son côté, et que le côté du carré circonscrit est égal au diamètre du cercle considéré.

Corollaire.

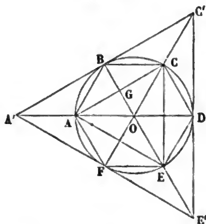
230. Du carré, on passe à l'octogone régulier inscrit en divisant (*fig.* 163) chacun des arcs AB, BC, CD, DA, en deux parties égales. On déduirait de même de l'octogone le polygone régulier de 16 côtés. ., et ainsi de suite. On peut donc, *avec la règle et le compas*, inscrire les polygones réguliers de 4, 8, 16, 32,... et, en général, de 2^n côtés.

PROBLÈME.

231. *Inscrire un hexagone régulier dans un cercle* (*fig.* 164).

Supposons le problème résolu, et soit ABCDEF l'hexagone demandé. En menant deux rayons consécutifs OA, OB, on obtient un triangle OAB qui est isocèle, et, par suite, dont les angles A et B sont égaux. Mais, si l'on remarque que le rayon BO prolongé passe par le sommet E de l'hexagone, on voit que l'angle inscrit ABE a pour mesure la moitié de l'arc AFE, c'est-à-dire une division de la circonférence; et comme l'angle au centre AOB a aussi pour mesure une de ces divisions AB, les deux angles ABO et AOB sont égaux, et le triangle OAB est équilatéral. Donc, *le côté de l'hexagone inscrit dans un cercle est égal au rayon* R *de ce cercle.*

Fig. 164.



Pour inscrire un hexagone régulier dans un cercle, il suffit, d'après cela, de porter six fois sur la circonférence une ouverture de compas égale au rayon, et de joindre les points de division consécutifs ainsi obtenus.

COROLLAIRES.

232. En joignant de deux en deux les sommets de l'hexagone, on obtient le triangle équilatéral inscrit ACE. Le triangle rectangle ACD donne

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2,$$

d'où

$$AC = R\sqrt{3}.$$

Ainsi, *le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon* R *est égal à* $R\sqrt{3}$; son apothème OG est d'ailleurs égal à la moitié du rayon, car la figure ABCO est un losange.

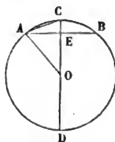
233. En menant des tangentes par les points B, D, F, on forme le triangle équilatéral circonscrit A'C'E', dont les côtés sont parallèles à ceux du triangle équilatéral inscrit ACE. Le rapport de similitude de ces deux triangles est égal (226) à $\frac{OB}{OG}$, c'est-à-dire à 2. Ainsi, deux lignes homologues quelconques dans le triangle équilatéral circonscrit et dans le triangle équilatéral inscrit, sont doubles l'une de l'autre.

234. De l'hexagone, on passe au dodécagone régulier inscrit en divisant en deux parties égales les arcs sous-tendus par les côtés de l'hexagone; on déduirait de même du dodécagone le polygone régulier de 24 côtés..., et ainsi de suite. On peut donc, *avec la règle et le compas,* inscrire les polygones réguliers de 3, 6, 12, 24,..., et en général de 3.2^n côtés.

PROBLÈME.

235. *Connaissant le côté d'un polygone régulier inscrit dans un cercle donné, calculer le côté du polygone régulier inscrit d'un nombre de côtés double* (*fig.* 165).

Fig. 165.



Soient $AB = a$ le côté donné et R le rayon du cercle; CD étant le diamètre perpendiculaire à AB, AC sera le côté cherché, que nous désignerons par a'.

La corde AC est moyenne proportionnelle entre le diamètre CD et sa projection $CE = OC - OE$ sur ce diamètre; on a donc

$$a'^2 = 2R(R - OE) = R(2R - 2OE).$$

Mais le triangle rectangle AEO donne

$$OE = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{AE}^2} \quad \text{ou} \quad OE = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}.$$

On a donc finalement

$$(1) \qquad a' = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{4R^2 - a^2}\right)}.$$

En particulier, lorsqu'on prend le rayon pour unité, on a

$$(2) \qquad a' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}.$$

On peut donner à cette relation une autre forme plus commode pour le calcul numérique. Le produit de la somme $2 + \sqrt{4 - a^2}$, par la différence $2 - \sqrt{4 - a^2}$, est égal à la différence des carrés de 2 et de $\sqrt{4 - a^2}$, c'est-à-dire à

$$4 - (4 - a^2) = a^2.$$

Par suite, on a

$$2 - \sqrt{4 - a^2} = \frac{a^2}{2 + \sqrt{4 - a^2}},$$

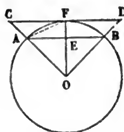
et enfin

$$(3) \qquad a' = \frac{a}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - a^2}}}.$$

PROBLÈME.

236. *Connaissant le côté d'un polygone régulier inscrit dans un cercle donné, calculer le côté du polygone régulier circonscrit semblable* (*fig.* 166).

Fig. 166.



Soient $AB = a$ le côté donné et R le rayon du cercle; menons la tangente CD au milieu F de l'arc AB et prolongeons-la jusqu'aux points C et D, où elle rencontre les rayons OA et OB prolongés. CD sera le côté cherché (222); désignons-le par α.

Les triangles semblables AOE, COF, donnent

$$\frac{CF}{AE}=\frac{OF}{OE} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{a}=\frac{R}{OE};$$

mais on a (235)

$$OE=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-a^2};$$

donc

(1)
$$\alpha=\frac{2aR}{\sqrt{4R^2-a^2}}.$$

En particulier, lorsqu'on prend le rayon pour unité, on a

(2)
$$\alpha=\frac{2a}{\sqrt{4-a^2}}.$$

Scolie.

237. Connaissant le côté d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de rayon 1, on pourra, par l'application répétée de la formule (3) du n° 235 et de la formule (2) du n° 236, n étant le nombre des côtés de ce premier polygone, calculer d'abord successivement les côtés et les périmètres des polygones réguliers inscrits de $2n$, $4n$, $8n$, $16n$,... côtés; et ensuite, les côtés et les périmètres des polygones réguliers circonscrits semblables. Voici les résultats qu'on obtient en prenant l'hexagone pour point de départ.

Polygones réguliers inscrits.		Polygones réguliers circonscrits.	
Nombre des côtés.	Demi-périmètres.	Nombre des côtés.	Demi-périmètres
6	3,0000	6	3,4641
12	3,1058	12	3,2154
24	3,1326	24	3,1596
48	3,1393	48	3,1460
96	3,1410	96	3,1427

PROBLÈME.

238. *Calculer le rapport de la circonférence au diamètre.*

Le rapport π de la circonférence au diamètre n'est autre que le nombre qui mesure la demi-circonférence de rayon 1. Par suite, le demi-périmètre de tout polygone inscrit dans cette circonférence est une valeur de π approchée par défaut, et le

demi-périmètre de tout polygone circonscrit est une valeur de π approchée par excès.

D'après cela, si l'on calcule (237), en partant de l'hexagone régulier inscrit, les demi-périmètres des polygones réguliers inscrits de 12, 24, 48, 96,... côtés, les nombres obtenus seront des valeurs par défaut de plus en plus voisines de π. Et de même, si l'on calcule (237) les demi-périmètres des polygones réguliers circonscrits de 6, 12, 24, 48, 96,... côtés, on aura des valeurs par excès de plus en plus voisines de π. On trouve ainsi 3,1410 et 3,1427 pour les demi-périmètres des polygones réguliers inscrit et circonscrit de 96 côtés; on conclut de là que π est renfermé entre ces deux nombres, et que 3,142 est sa valeur à moins d'un millième.

C'est de cette manière qu'Archimède, le plus grand géomètre de l'antiquité, qui vivait à Syracuse 250 ans avant Jésus-Christ, et auquel appartient la gloire d'avoir trouvé le premier le rapport de la circonférence au diamètre, a prouvé que π était compris entre

$$3+\frac{10}{71}=3,140\ldots \quad \text{et} \quad 3+\frac{10}{70}=\frac{22}{7}=3,142\ldots$$

Voici les valeurs par défaut de π et de son inverse avec 10 décimales exactes :

$$\pi=3,1415926535\ldots,\quad \frac{1}{\pi}=0,3183098861\ldots$$

Il est indispensable de retenir par cœur les cinq ou six premiers chiffres de chacun de ces nombres.

PROBLÈME.

239. *Calculer la longueur d'une circonférence de rayon donné*, et, inversement, *calculer le rayon d'une circonférence dont la longueur est connue.*

En donnant à la formule $\frac{C}{2R}=\pi$ les deux formes

$$C=2\pi R,\quad R=\frac{C}{2\pi},$$

on voit : 1° que *pour calculer la longueur d'une circonfé-*

rence, il faut multiplier par le nombre π *le double de la longueur du rayon ;* 2° que *pour calculer le rayon d'une circonférence, il faut diviser par* π *ou multiplier par* $\frac{1}{\pi}$ *la moitié de la longueur de la circonférence.*

Exemples :

1° *Quelle est la circonférence d'une roue de voiture dont le rayon est de* $0^m,65$?

En multipliant le rayon $0^m,65$ par 6,28 qui est la valeur de 2π à moins d'un centième, on trouve pour la circonférence cherchée $4^m,08$ à moins d'un centimètre.

2° *Quel est le rayon du méridien de Paris?*

On sait que la demi-circonférence de ce méridien est de 20000000 de mètres; en multipliant ce nombre par 0,3183099, qui est la valeur de $\frac{1}{\pi}$ à moins de $\frac{1}{2}$ dix-millionième, on trouve pour le rayon cherché 6366197 mètres à moins de 1 mètre.

240. La longueur de l'arc de 180 degrés dans le cercle de rayon R, c'est-à-dire de la demi-circonférence, étant πR, la longueur de l'arc de 1 degré sera $\frac{\pi R}{180}$, et, par suite, *la longueur* l *de l'arc de* n *degrés dans le cercle de rayon* R *a pour expression*

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

Cette formule et les deux suivantes,

$$n = \frac{180 l}{\pi R}, \quad R = \frac{180 l}{\pi n},$$

qu'on en déduit, servent à calculer l'une quelconque des trois quantités l, n, R, lorsqu'on connaît les deux autres.

Exemples :

1° *Sur une circonférence dont le rayon a* $0^m,90$, *quelle est la longueur de l'arc de* $25°45'$?

On a ici

$$n = 25 + \frac{45}{60} = 25 + \frac{3}{4} = \frac{103}{4},$$

et par suite

$$l = \frac{\pi . 0,90 . \frac{103}{4}}{180} = \frac{103\pi}{800} = \frac{103.3,14}{800} = 0^{m},40\ldots.$$

2° *Quel est l'arc dont la longueur est égale au rayon?*

La seconde des formules qui précèdent donne pour le nombre de degrés de cet arc

$$n = \frac{180^{\circ}}{\pi} = 180^{\circ} \times 0,3183098\ldots = 57^{\circ}17'44'',80\ldots.$$

3° *Quel est le rayon du cercle dans lequel l'arc de* 30 *degrés vaut* 1 *mètre?*

La troisième formule donne

$$R = \frac{180}{\pi . 30} = \frac{6}{\pi} = 6.0,3183 = 1^{m},910.$$

SCOLIE.

241. *Deux arcs semblables*, c'est-à-dire deux arcs qui répondent à des angles au centre égaux dans des cercles différents, ou qui ont le même nombre de degrés, *sont proportionnels à leurs rayons.*

En effet, soient l et l' les longueurs des deux arcs, R et R' leurs rayons, O et O' les angles au centre égaux qui correspondent à ces arcs; on a

$$\frac{l}{2\pi R} = \frac{O}{4 \text{ droits}}, \quad \frac{l'}{2\pi R'} = \frac{O'}{4 \text{ droits}};$$

d'où, en divisant membre à membre et observant que $O = O'$,

$$\frac{l}{l'} = \frac{R}{R'}.$$

EXERCICES.

1. En joignant de deux en deux les sommets d'un pentagone régulier *ou* en prolongeant ses côtés de deux en deux, les points d'intersection obtenus forment intérieurement *ou* extérieurement un autre pentagone régulier.

2. Si l'on prolonge deux côtés AB et CD d'un polygone régulier de centre O, séparés par un seul côté BC, jusqu'à leur rencontre en E, le quadrilatère AECO est inscriptible.

3. Prouver qu'on peut exécuter un pavage, soit avec des triangles équilatéraux, soit avec des carrés, soit avec des hexagones réguliers. — On ne peut le faire en employant des pentagones réguliers ou des polygones réguliers de plus de six côtés.

4. On peut exécuter un pavage, soit en assemblant à la fois des carrés et des octogones réguliers de même côté, soit en assemblant des triangles équilatéraux et des dodécagones réguliers de même côté, soit en assemblant des décagones et des pentagones réguliers de même côté.

5. Un polygone équilatéral inscrit dans un cercle est régulier. — Un polygone équilatéral circonscrit à un cercle est régulier, si le nombre de ses côtés est impair.

6. Un polygone équiangle inscrit dans un cercle est régulier, si le nombre de ses côtés est impair. — Un polygone équiangle circonscrit à un cercle est régulier.

7. La somme des distances d'un point pris à l'intérieur d'un polygone régulier aux m côtés de ce polygone est égale à m fois l'apothème. — Considérer le cas où le point choisi est extérieur.

8. Deux diagonales d'un pentagone régulier qui n'aboutissent pas au même sommet se coupent en moyenne et extrême raison.

9. Si d'un point P du cercle circonscrit à un triangle équilatéral ABC on mène des droites à ses sommets, la somme $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ est constante. — Si ABCP, A'B'C'P', sont deux cercles concentriques dans lesquels soient inscrits les triangles équilatéraux ABC, A'B'C', on a

$$\overline{AP'}^2 + \overline{BP'}^2 + \overline{CP'}^2 = \overline{A'P}^2 + \overline{B'P}^2 + \overline{C'P}^2.$$

10. Sur une droite donnée comme côté, décrire un octogone régulier.

11. Inscrire un triangle équilatéral dans un carré donné, en plaçant l'un de ses sommets soit en l'un des sommets du carré donné, soit au milieu d'un de ses côtés.

12. Trouver le lieu des points dont la somme des carrés des distances aux sommets d'un polygone régulier est constante et égale à un carré donné.

13. Sur le diamètre AB d'un cercle O, on construit un triangle équilatéral ABC; on divise AB en n parties égales, et l'on joint le sommet C à l'extrémité D de la seconde division ; CD prolongée coupe le cercle en F, et l'on demande de calculer la corde AF. — Examiner les cas particuliers de $n = 3, 4, 6$.

14. Inscrire dans un triangle équilatéral donné trois cercles égaux tangents entre eux, et déterminer leur rayon en fonction du côté du triangle.

15. Dans deux circonférences de rayons différents, le rapport des angles au centre qui interceptent des arcs de même longueur est égal au rapport inverse des rayons.

16. Démontrer que π est compris entre 3 et 4, par la considération des périmètres de l'hexagone régulier inscrit et du carré circonscrit.

17. Quelle erreur commet-on en remplaçant la demi-circonférence d'un cercle par la somme des côtés du triangle équilatéral et du carré inscrits dans ce cercle?

18. Si deux circonférences sont tangentes intérieurement à une troisième circonférence, et si la somme de leurs rayons est égale à celui de cette troisième circonférence, l'arc compris entre leurs points de contact sur la grande circonférence est égal à la somme des arcs respectivement compris sur les circonférences intérieures entre leur point de rencontre le plus rapproché de la grande circonférence et les mêmes points de contact.

19. Si l'on décrit deux demi-cercles égaux sur le diamètre d'un demi-cercle donné, et si l'on inscrit un cercle dans l'espace compris entre les trois demi-circonférences, le diamètre de ce cercle est à celui des cercles égaux dans le rapport de 2 à 3.

QUESTIONS PROPOSÉES

SUR LE TROISIÈME LIVRE.

1. Si un triangle circonscrit à un triangle fixe se meut en restant semblable à lui-même, un point quelconque de son plan décrit une circonférence.

2. Mener à un cercle donné, par deux points donnés extérieurement, deux sécantes qui se coupent sur le cercle, et dont les deux autres points d'intersection avec la circonférence déterminent une corde parallèle à une direction donnée.

3. Les diagonales AC, BD, d'un quadrilatère inscrit ABCD se coupent en E. Démontrer qu'on a

$$\frac{AB.BC}{AD.DC} = \frac{BE}{ED}.$$

4. Si un carré DEGF est inscrit dans un triangle rectangle ABC, de manière qu'un côté DE du carré coïncide avec l'hypoténuse BC, ce côté est moyen proportionnel entre les deux segments BD et EC de l'hypoténuse.

5. Soit ABC un triangle inscrit. On mène dans ce triangle la paral-

lèle BD à la tangente en A au cercle circonscrit, jusqu'à sa rencontre D avec le côté AC prolongé s'il le faut; démontrer que

$$\overline{AB}^2 = AC.AD.$$

6. Étant donnés un parallélogramme ABCD et deux points P et Q sur les côtés AD et CD, si l'on mène par ces points, dans une direction quelconque, deux parallèles qui rencontrent respectivement en M et en M′ les deux côtés AB et CB, le produit AM.CM′ est constant.

7. Inscrire un carré dans un triangle. — Discussion.

8. Sur la base BC d'un triangle ABC, on décrit extérieurement au triangle un carré BCDE; on mène les droites AD et AE qui coupent BC en P et en Q : démontrer que PQ est égal au côté du carré inscrit dans le triangle ABC et reposant sur BC.

9. a, b, c, désignant les longueurs des trois côtés d'un triangle, p, q, r, celles des trois hauteurs; x, y, z, les côtés des trois carrés inscrits; x', y', z', les côtés des trois carrés ex-inscrits, démontrer les relations

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{p} + \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{q} + \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r} + \frac{1}{c},$$
$$\frac{1}{x'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{y'} = \frac{1}{q} - \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{z'} = \frac{1}{r} - \frac{1}{c}.$$

10. La distance d'un point M d'une circonférence à une corde quelconque est la moyenne proportionnelle des distances du même point aux tangentes menées par les extrémités de la corde considérée.

11. Si, d'un point pris dans le plan d'un polygone, on abaisse des perpendiculaires sur tous ses côtés, les deux sommes des carrés des segments déterminés pris alternativement sont égales.

12. Dans tout triangle ABC, le produit des distances des points B et C à la bissectrice de l'angle intérieur A est égal au carré de la moitié de BC, diminué du carré de la demi-différence des côtés AB et AC; de même, le produit des distances des points B et C à la bissectrice de l'angle extérieur A est égal au carré de la demi-somme des côtés AB et AC, diminué du carré de la moitié de BC.

13. Le sommet A d'un rectangle ABCD est fixe, les sommets B et D se meuvent sur un même cercle; quel est le lieu du sommet C opposé au sommet A?

14. Trouver le lieu des points qui partagent les diverses cordes d'un cercle donné en deux segments (additifs ou soustractifs) dont le produit soit constant.

15. Dans tout trapèze, la différence des carrés des diagonales est à la

différence des carrés des côtés non parallèles comme la somme des côtés parallèles est à leur différence.

16. Calculer les diagonales d'un trapèze, connaissant ses quatre côtés.

17. Si l'on mène une tangente à un cercle, la partie de cette tangente interceptée par les tangentes menées aux extrémités d'un même diamètre est divisée au point de contact en deux segments dont le produit est égal au carré du rayon.

18. Deux cercles sont tangents en O; par le point O, on mène à angle droit l'une sur l'autre les sécantes communes POP', QOQ'; A et A' étant les points où la ligne des centres coupe les deux cercles, démontrer la relation

$$\overline{PP'}^2 + \overline{QQ'}^2 = \overline{AA'}^2.$$

19. AOB est un quadrant; si l'on tire la corde Qq parallèle à la corde AB, jusqu'à ses points de rencontre R et r avec les rayons OA et OB, on a

$$\overline{QR}^2 + \overline{Qr}^2 = \overline{AB}^2.$$

20. Soit un demi-cercle décrit sur AB; deux cordes quelconques AD et BC se coupent en P : démontrer que $\overline{AB}^2 = AD.AP + BC.BP$.

21. Dans un triangle quelconque ABC, soient M le milieu de la base BC, I son point de contact avec le cercle inscrit au triangle, H et K les points de rencontre de la hauteur et de la bissectrice issues du sommet A avec BC; démontrer la relation

$$MI.IH = MH.KI.$$

22. R, r, ρ_1, ρ_2, ρ_3, étant les rayons du cercle circonscrit, du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits à un triangle quelconque, et d, δ_1, δ_2, δ_3, étant les distances du centre du cercle circonscrit aux centres des cercles inscrit et ex-inscrits, démontrer les relations

$$R^2 = d^2 + 2Rr = \delta_1^2 - 2R\rho_1 = \delta_2^2 - 2R\rho_2 = \delta_3^2 - 2R\rho_3 = \frac{d^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}{12}.$$

23. Si ABCD est un parallélogramme, et si l'on décrit un cercle passant par A et coupant respectivement en F, H, G, les côtés AB et AD et la diagonale AC, démontrer la relation

$$AB.AF + AD.AH = AC.AG.$$

24. Dans tout triangle, la somme des perpendiculaires abaissées du centre du cercle circonscrit sur les trois côtés est égale à la somme des rayons des cercles inscrit et circonscrit.

25. Étant donnés un angle et un point situé dans cet angle, construire

un triangle qui ait l'un de ses sommets en ce point, ses deux autres sommets situés respectivement sur les côtés de l'angle donné, et qui soit semblable à un triangle donné.

26. Dans un cercle donné, inscrire un triangle :

1° Tel que sa base soit parallèle à une droite donnée, ses deux autres côtés passant respectivement par deux points donnés sur cette droite;

2° Tel que sa base soit parallèle à une droite donnée, ses deux autres côtés passant respectivement par deux points donnés d'une manière quelconque;

3° Tel que ses trois côtés passent respectivement par trois points donnés d'une manière quelconque.

27. Construire un triangle, connaissant le produit de deux côtés, la médiane relative au troisième côté et la différence des angles adjacents à ce côté.

28. Construire un triangle, connaissant un angle, la hauteur relative au côté opposé et la somme ou la différence des deux autres côtés.

29. Par deux points donnés, mener à une circonférence donnée deux sécantes qui se coupent sur la circonférence, et dont les deux autres points d'intersection déterminent une corde parallèle à la droite qui joint les deux points donnés.

30. Étant données trois circonférences concentriques, construire un triangle semblable à un triangle donné et qui ait ses sommets respectivement situés sur les trois circonférences données.

31. Partager une droite donnée en trois parties telles, que la première et la seconde soient dans le rapport de deux droites données M et N, et la seconde et la troisième dans le rapport de deux autres droites données P et Q.

32. Déterminer le point dont les distances aux trois côtés d'un triangle sont proportionnelles à trois droites données.

33. Construire un trapèze, connaissant les deux diagonales et les deux côtés non parallèles.

34. Si l'on rapporte un polygone régulier à deux axes coordonnés, les coordonnées de son centre sont respectivement les moyennes arithmétiques des coordonnées de ses différents sommets par rapport aux axes considérés. — Application au triangle équilatéral.

35. Si des sommets d'un triangle équilatéral inscrit, on mène des perpendiculaires sur un diamètre du cercle circonscrit, l'ordonnée qui tombe d'un côté de ce diamètre est égale à la somme des deux ordonnées qui tombent de l'autre côté; de même, l'abscisse qui tombe d'un côté du centre est égale à la somme des deux abscisses qui tombent de l'autre côté.

36. Inscrire un carré dans l'espace compris entre deux cercles sécants égaux.

37. Sur une droite donnée comme diagonale, décrire un parallélogramme dont les angles soient doubles l'un de l'autre. — Déduire de la solution de ce problème un moyen d'opérer la trisection de l'angle droit.

38. Connaissant le rapport du périmètre d'un polygone régulier inscrit au périmètre du polygone régulier circonscrit semblable, calculer les périmètres de ces deux polygones en prenant pour unité le diamètre du cercle donné.

39. Inscrire dans un carré donné quatre cercles égaux tangents entre eux, et déterminer leur rayon en fonction du côté du carré.

40. Inscrire dans un cercle donné m cercles égaux tangents entre eux, et déterminer leur rayon en fonction du rayon du cercle donné et de la corde qui sous-tend la $m^{ième}$ partie de sa circonférence.

41. Soient dans un cercle O le diamètre AB et la corde AC égale au rayon; menons le rayon OD perpendiculaire sur AC, et prolongeons-le jusqu'à son point de rencontre en E avec la tangente en A; portons à partir du point E sur cette tangente, et dans le sens EA, une longueur EF égale à trois fois le rayon OA; puis, menons la droite FB. Quelle erreur commet-on en remplaçant par cette droite la demi-circonférence OA?



LIVRE IV.

LES AIRES.

§ I.

Programme officiel : *Mesure des aires : aire du rectangle, du parallélogramme, du triangle, du trapèze, d'un polygone quelconque. — Théorème du carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle.*

DÉFINITIONS.

242. On appelle *aire* l'étendue d'une portion limitée de surface. Il y a entre l'*aire* et la *surface* une différence analogue à celle qui existe entre la *longueur* et la *ligne*. Les mots *ligne* et *surface* sont relatifs à la *forme*, tandis que les mots *longueur* et *aire* sont relatifs à l'*étendue*.

Quand deux figures peuvent coïncider, elles sont *égales*. Quand deux figures non superposables ont des aires égales, on dit qu'elles sont *équivalentes*.

243. Un côté quelconque d'un triangle étant pris pour *base*, la *hauteur* du triangle est la perpendiculaire abaissée du sommet opposé sur la base.

Un côté quelconque d'un parallélogramme étant pris pour *base*, la *hauteur* du parallélogramme est la distance constante (68) qui existe entre sa base et le côté opposé.

D'après cela, les deux côtés adjacents d'un rectangle constituent indifféremment sa *base* et sa *hauteur*, et reçoivent le nom de *dimensions* de la figure.

Les *bases* d'un trapèze sont ses deux côtés parallèles, et sa *hauteur* est la distance constante de ces deux côtés.

244. On dit qu'une grandeur M est à la fois proportionnelle à plusieurs autres grandeurs A, B, C, lorsque ces dernières

grandeurs, sauf une, restant constantes, la grandeur M est proportionnelle à celle qui varie (121).

245. *Lorsqu'une grandeur* M *est proportionnelle à plusieurs autres grandeurs* A, B, C, *le rapport de deux valeurs quelconques de la grandeur* M *est égal au produit des rapports des valeurs correspondantes des autres grandeurs.*

Ainsi, soient

$$m,\quad a,\quad b,\quad c,$$
$$m',\quad a',\quad b',\quad c',$$

deux séries de valeurs correspondantes des grandeurs M, A, B, C, obtenues en rapportant chaque grandeur à une unité de son espèce. On aura

$$\frac{m}{m'}=\frac{a}{a'}\cdot\frac{b}{b'}\cdot\frac{c}{c'}.$$

En effet, soient m_1 la valeur de M qui correspond aux valeurs $a', b, c,$ de A, B, C, et m_2 celle qui répond à $a', b', c;$ on aura, d'après la définition du n° 244,

$$\frac{m}{m_1}=\frac{a}{a'},\quad \frac{m_1}{m_2}=\frac{b}{b'},\quad \frac{m_2}{m'}=\frac{c}{c'}.$$

En multipliant ces trois égalités membre à membre et simplifiant, on trouve

$$\frac{m}{m'}=\frac{a}{a'}\cdot\frac{b}{b'}\cdot\frac{c}{c'}.$$

THÉORÈME.

246. *L'aire d'un rectangle de base constante est proportionnelle à sa hauteur;* en d'autres termes, *le rapport de deux rectangles de même base est égal au rapport de leurs hauteurs.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit (125) de prouver :

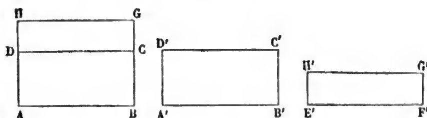
1° Que, *si deux rectangles* ABCD, A'B'C'D', *de même base* AB = A'B' (*fig.* 167), *ont des hauteurs égales* AD *et* A'D', *ces deux rectangles sont égaux;*

2° Que, *si trois rectangles* ABGH, A'B'C'D', E'F'G'H' (*fig.* 167), *de même base* AB = A'B' = E'F', *sont tels, que la hauteur* AH *du premier soit la somme des hauteurs* A'D', E'H', *des deux*

autres, le premier rectangle est égal à la somme des deux autres.

Or, la première partie est évidente, puisque les deux rectangles ABCD, A'B'C'D', sont superposables. Quant à la seconde

Fig. 167.



partie, pour la démontrer, il suffit d'observer que, si l'on prend sur AH une longueur AD égale A'D', et si l'on mène la parallèle DC à AB, DH sera égale à E'H' en vertu de l'hypothèse; par suite, le rectangle ABGH se trouvera décomposé en deux rectangles ABCD, DCGH, respectivement égaux aux rectangles A'B'C'D', E'F'G'H'.

COROLLAIRES.

247. Comme on peut échanger la base et la hauteur d'un rectangle (243), on peut dire aussi que *le rapport de deux rectangles de même hauteur est égal au rapport de leurs bases.*

248. En rapprochant les deux derniers énoncés et ayant égard à la définition donnée au nº 244, on peut dire que *l'aire d'un rectangle est à la fois proportionnelle à sa base et à sa hauteur.*

Donc (245), *le rapport des aires de deux rectangles quelconques est égal au produit des rapports de leurs bases et de leurs hauteurs;* en d'autres termes, *deux rectangles quelconques sont entre eux comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur.*

THÉORÈME.

249. *L'aire d'un rectangle a pour mesure le produit du nombre qui mesure sa base par le nombre qui mesure sa hauteur, lorsque l'on prend pour unité d'aire le carré construit sur l'unité de longueur.*

En effet, soient (*fig.* 167) ABGH le rectangle à mesurer, et A'B'C'D' le carré dont le côté A'B' = A'D' représente l'unité de longueur. On aura (248)

$$\frac{\text{ABGH}}{\text{A'B'C'D'}} = \frac{\text{AB}}{\text{A'B'}} \cdot \frac{\text{AH}}{\text{A'B'}}.$$

Or, le premier membre de cette relation est égal au nombre qui mesure l'aire ABGH (119), et les rapports qui composent le second membre sont respectivement égaux aux nombres qui mesurent la base et la hauteur du rectangle proposé. Donc, dans le système d'unités adopté, le nombre qui mesure l'aire du rectangle est égal au produit des nombres qui mesurent sa base et sa hauteur. Ainsi, en désignant ces trois nombres par S, B, H, on a la formule

$$S = B.H.$$

Comme ce théorème est d'un usage très-fréquent, on préfère l'énoncer d'une manière plus rapide, quoique incorrecte, en disant simplement : *L'aire du rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur.*

Scolie.

250. L'aire d'un carré est égale au carré de son côté; de là, le nom de *carré* donné à la seconde puissance d'un nombre.

251. Exemples :

1° *Quelle est l'aire d'un rectangle dont la base est égale à* $2^{m},34$ *et la hauteur à* $3^{m},19$?

On a pour l'aire demandée :

$$S = 2,34 . 3,19 = 7^{mq},4646,$$

ou 7 mètres carrés, 46 décimètres carrés, 46 centimètres carrés.

2° *Il a fallu* 15 *rouleaux de papier, de* 10 *mètres de longueur chacun sur* $0^{m},60$ *de largeur, pour tapisser une paroi rectangulaire de* $18^{m},25$ *de largeur : quelle est la hauteur de cette paroi?*

L'aire du rectangle considéré est

$$S = 10 . 0,60 . 15 = 90^{mq}.$$

Sa base étant $18^m,25$, on aura pour sa hauteur

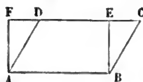
$$H = \frac{90}{18,25} = 4^m,93,$$

à moins de 1 centimètre.

THÉORÈME.

252. *L'aire d'un parallélogramme a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Fig. 168.



Soit (*fig.* 168) le parallélogramme ABCD. On obtient le rectangle de même base et de même hauteur, en menant des extrémités de la base AB sur le côté opposé les perpendiculaires AF et BE. Pour démontrer le théorème énoncé, il suffit alors (249) de prouver l'équivalence du parallélogramme ABCD et du rectangle ABEF. Le trapèze ABED est une partie commune à ces deux figures; il reste donc à comparer les parties non communes BEC, AFD. Or, ces parties non communes sont des triangles rectangles égaux, comme ayant l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal, savoir : BC = AD comme côtés opposés d'un parallélogramme, et BE = AF pour la même raison.

COROLLAIRES.

253. En désignant par S, B, H les trois nombres qui mesurent respectivement l'aire d'un parallélogramme, sa base et sa hauteur, on a la formule

$$S = B.H.$$

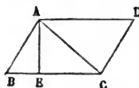
Donc :

Deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalents; deux parallélogrammes sont entre eux comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur; deux parallélogrammes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs; deux parallélogrammes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

THÉORÈME.

254. *L'aire d'un triangle a pour mesure la moitié du produit de sa base par sa hauteur.*

Fig. 169.



Il suffit, pour démontrer ce théorème, de prouver que tout triangle est la moitié du parallélogramme de même base et de même hauteur.

Soit le triangle ABC (*fig.* 169). On obtient un parallélogramme de même base BC et de même hauteur AE, en menant, par les sommets A et C du triangle, des parallèles AD et CD aux côtés opposés. Le triangle ABC est la moitié de ce parallélogramme ABCD, car tout parallélogramme est partagé par une de ses diagonales en deux triangles égaux (33). Donc, l'aire du parallélogramme ABCD étant égale au produit de sa base BC par sa hauteur AE (252), l'aire du triangle ABC sera égale à la moitié du produit de sa base BC par sa hauteur AE.

COROLLAIRES.

255. En désignant par S, B, H, les trois nombres qui mesurent respectivement l'aire du triangle, sa base et sa hauteur, on a la formule

$$S = \frac{B.H}{2} = \frac{B}{2} \cdot H = B \cdot \frac{H}{2}.$$

Donc :

Deux triangles de même base et de même hauteur sont équivalents; deux triangles sont entre eux comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur; deux triangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs; deux triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

256. Quand le triangle est équilatéral, son aire s'exprime en fonction de son côté *a*.

La hauteur du triangle tombant alors au milieu de sa base,

on a en effet

$$H = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

et la formule

$$S = \frac{B}{2} \cdot H$$

devient

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Exemple. — *Quelle est l'aire du triangle équilatéral de 1 mètre de côté?*

On a

$$S = \frac{1^{mq}.\sqrt{3}}{4} = \frac{1^{mq},7321}{4} = 0^{mq},4330$$

à 1 centimètre carré près.

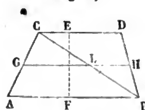
257. Pour évaluer l'aire d'un polygone, il suffit de décomposer ce polygone en triangles, de calculer les aires de ces triangles et de faire la somme des nombres ainsi obtenus.

THÉORÈME.

258. *L'aire d'un trapèze a pour mesure le produit de la demi-somme de ses bases par sa hauteur.*

Soit le trapèze ABCD (*fig.* 170). En menant la diagonale BC, on le partage en deux triangles ABC, BCD, qui ont pour hauteur commune la hauteur EF du trapèze, et pour bases respectives les bases mêmes du trapèze.

Fig. 170.



L'aire du premier est égale à $\frac{AB}{2} \cdot EF$, celle du second à $\frac{CD}{2} \cdot EF$. En ajoutant ces deux expressions, on trouve, pour l'aire du trapèze,

$$\frac{AB + CD}{2} \cdot EF.$$

SCOLIES.

259. En désignant par S, B, b, H, les nombres qui mesurent respectivement l'aire d'un trapèze, ses deux bases et sa hauteur, on a la formule

$$S = \frac{B + b}{2} \cdot H.$$

260. Menons par le point G (*fig.* 170), milieu du côté AC, une parallèle GH aux deux bases du trapèze. Cette parallèle coupera le côté BD et la diagonale BC en leurs milieux H et L (169). On aura donc

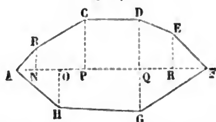
$$GL = \frac{AB}{2}, \quad LH = \frac{CD}{2}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad GH = \frac{AB + CD}{2}.$$

La droite qui joint les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze est donc égale à la demi-somme de ses bases, et l'on peut dire par suite que *l'aire d'un trapèze est égale au produit de sa hauteur par la droite qui joint les milieux de ses côtés non parallèles.*

261. Nous avons dit au n° 257 que, pour évaluer l'aire d'un polygone, on décomposait ce polygone en triangles. Plus généralement, il suffit de le décomposer en parties que l'on sache mesurer, et de faire ensuite la somme des aires partielles. Voici un procédé de décomposition très-usité, principalement sur le terrain.

On mène la plus grande diagonale AF (*fig.* 171) du polygone proposé. Puis, à l'aide des perpendiculaires BN, CP, DQ, ER, HO, GQ, abaissées des sommets extérieurs sur cette diagonale, *on décompose le polygone en triangles et en trapèzes*

Fig. 171.

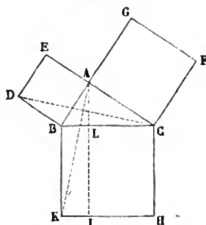


rectangles. En mesurant ces diverses perpendiculaires et les distances mutuelles de leurs pieds sur AF, on aura tous les éléments nécessaires pour calculer les aires partielles dont le polygone considéré est la somme.

THÉORÈME.

262. *Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit* (*fig.* 172).

Fig 172.



Soit le triangle ABC rectangle en A ; soient les carrés ABDE, ACFG, BCHK, construits sur ses trois côtés. L'angle en A étant droit, le côté AE du carré ABDE sera le prolongement du côté CA du triangle, et le côté AG du carré ACFG sera le prolongement du côté BA.

Ceci posé, abaissons sur l'hypoténuse BC la perpendiculaire AL, et prolongeons-la jusqu'en I où elle coupe le côté KH; menons les droites AK et DC. Le triangle ABK a même base BK que le rectangle BKIL, et il a aussi même hauteur, puisque son sommet A se trouve sur la droite IL : le triangle ABK équivaut donc (254) à la moitié du rectangle BKIL. De même, le triangle BCD équivaut à la moitié du carré ABDE, car il a la même base BD et même hauteur, puisque son sommet C se trouve sur la droite EA. D'ailleurs, les deux triangles ABK et BDC sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : l'angle ABK égal à l'angle CBD, comme formés tous deux d'un angle droit et de l'angle ABC du triangle donné; le côté BK égal au côté BC comme côtés d'un même carré, le côté AB égal au côté BD pour la même raison. De l'égalité des deux triangles ABK et BDC, on conclut l'équivalence du rectangle BKIL et du carré ABDE.

On démontrerait d'une manière analogue, en menant les

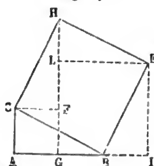
droites AH et BF, l'équivalence du rectangle CLIH et du carré ACFG.

Le carré BCHK, somme des deux rectangles BKIL et CHIL, est donc équivalent à la somme des deux carrés ABDE et ACFG.

Scolies.

263. On peut donner du théorème qui précède une autre démonstration qui montre comment on peut *décomposer effectivement* le carré construit sur l'hypoténuse en parties capables de recouvrir les carrés construits sur les côtés.

Fig. 173.



Soit (*fig.* 173) le triangle ABC rectangle en A. Sur l'hypoténuse BC, construisons le carré BCHK. Des sommets H et K, abaissons sur le côté AB et sur son prolongement les perpendiculaires HG et KI; des sommets C et K, menons à ce même côté, jusqu'à la rencontre de HG, les parallèles CF et KL.

Les quatre triangles rectangles ABC, CFH, HLK, KIB, sont égaux, comme ayant l'hypoténuse égale et un angle aigu égal. GIKL et ACFG sont donc les carrés construits sur les côtés AB et AC du triangle donné. La figure montre alors immédiatement que, si l'on enlève les deux triangles HCF, HLK, qui, avec le pentagone irrégulier CFLKB, constituent le carré construit sur l'hypoténuse, pour les placer en CAB et BKI, on formera, avec les trois mêmes parties disposées de cette nouvelle façon, la figure ACFLKI, qui est précisément la somme des deux carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit.

264. Enfin, on peut déduire le théorème précédent de celui du n° 200. Car, puisque l'aire du carré construit sur une droite a pour mesure le carré du nombre abstrait qui mesure la longueur de cette droite, on voit que le théorème du n° 200 ex-

prime que la mesure du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des mesures des carrés construits sur les côtés de l'angle droit, et par suite que le premier carré équivaut à la somme des deux autres. Inversement, on passerait du point de vue *concret* au point de vue *abstrait*, c'est-à-dire du n° 262 au n° 200, en remplaçant les aires des carrés par leurs mesures respectives.

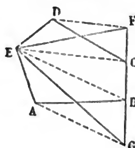
La même remarque s'applique aux diverses relations numériques que nous avons démontrées dans le § III du livre III, entre les divers éléments d'un triangle, rapportés à une unité commune. De ces relations, résultent immédiatement autant de théorèmes sur les aires; et l'on pourrait inversement donner des démonstrations directes de ces derniers théorèmes et en déduire ensuite les relations numériques correspondantes.

PROBLÈME.

265. *Construire un triangle équivalent à un polygone donné* (*fig.* 174).

Soit par exemple le pentagone ABCDE (*fig.* 174). En menant la diagonale EC, on détache de ce pentagone le triangle ECD. Si par le sommet D on mène alors une parallèle DF à la diagonale EC, tous les triangles qui auront EC pour base et leurs sommets sur DF seront équivalents au triangle ECD (255), et formeront avec le quadrilatère ECBA un polygone équivalent au pentagone proposé. Or, pour que le nouveau polygone ABCFE ait un sommet de moins, il suffit de choisir

Fig. 174.



parmi tous ces triangles celui dont le sommet est en F, à la rencontre de la parallèle DF et du côté BC prolongé.

La construction indiquée permettant de *transformer un polygone quelconque en un polygone équivalent, mais ayant un*

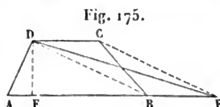
côté de moins, on arrivera toujours, en la répétant, à un triangle équivalent au polygone proposé.

SCOLIE.

266. Le problème précédent fournit un nouveau moyen pour évaluer l'aire d'un polygone; on peut, en effet, transformer le polygone considéré en un triangle équivalent, puis calculer l'aire de ce triangle.

Appliquons ce procédé à la recherche de l'aire du trapèze.

Fig. 175.



Soit (*fig.* 175) un trapèze quelconque ABCD. Menons la diagonale DB et la parallèle CE à cette diagonale jusqu'à la rencontre de la base AB prolongée.

Le triangle ADE sera équivalent au trapèze ABCD. Il a d'ailleurs même hauteur DF, et sa base AE est la somme des deux bases du trapèze. On retombe ainsi sur la mesure connue (258).

PROBLÈME.

267. *Construire un carré équivalent à un polygone donné.*

Supposons d'abord qu'on veuille construire un carré équivalent à un triangle donné. Soient X le côté de ce carré, B et H la base et la hauteur du triangle proposé. On devra avoir (250, 254)

$$X^2 = \frac{BH}{2} = \frac{B}{2} \cdot H.$$

Le côté du carré cherché sera donc une moyenne proportionnelle à la moitié de la base du triangle et à sa hauteur.

S'il s'agit d'un parallélogramme, d'un trapèze, et, en général, d'un polygone dont l'aire soit exprimée par le produit de deux lignes, il suffira de chercher la moyenne proportionnelle à ces deux lignes. On obtiendra ainsi le côté du carré équivalent.

Dans tout autre cas, on transformera le polygone donné en un triangle équivalent (265), et on cherchera le carré équivalent à ce triangle, comme on vient de le dire.

EXERCICES.

1. Étant donné un trapèze ABCD dont les bases AB et CD sont respectivement égales à 5 et à 3 mètres, on demande de déterminer le point I de la diagonale AC par lequel passe la droite EF qui, parallèle au côté AD, divise le trapèze en deux parties AEFD, EBCF, dont le rapport est celui de 2 à 3.

2. Les bases d'un trapèze étant respectivement égales à 7 et à 12 mètres, calculer la longueur de la droite parallele aux bases, qui divise le trapèze en deux parties équivalentes.

3. Chercher l'expression de l'aire d'un trapèze, en le considérant comme la différence des deux triangles obtenus en prolongeant jusqu'à leur rencontre les deux côtés non parallèles.

4. Étant données les bases et la hauteur d'un trapèze, calculer les aires des deux triangles dont il est la différence.

5. L'aire d'un trapèze est égale à la moitié du produit d'un de ses côtés non parallèles par la perpendiculaire abaissée du milieu de l'autre côté sur le premier.

6. Par un point pris sur la bissectrice d'un angle, mener une droite telle, que la partie interceptée par les côtés de l'angle soit minimum ou qu'il en soit de même de l'aire du triangle déterminé.

7. Dans un angle donné, mener une droite minimum qui intercepte un triangle dont l'aire soit équivalente à un carré donné.

8. Les deux triangles opposés, qu'on forme en joignant un point pris dans l'intérieur d'un parallélogramme à ses quatre sommets, équivalent ensemble à la moitié du parallélogramme.

9. Le triangle formé en joignant le milieu d'un des côtés non parallèles d'un trapèze aux extrémités du côté opposé, équivaut à la moitié du trapèze.

10. Si, par le milieu E de la diagonale BD d'un quatrilatère ABCD, on mène la parallèle FEG à la seconde diagonale AC, démontrer que la droite AG divise le quadrilatère en deux parties équivalentes.

11. Si les diagonales d'un quatrilatère inscrit se coupent à angle droit, la somme des produits des côtés opposés représente une aire double de celle du quadrilatère donné.

12. P étant un point pris dans le plan d'un parallélogramme ABCD, démontrer que le triangle PBD est équivalent à la somme des triangles PAB, PBC.

§ II.

PROGRAMME OFFICIEL : *Aire d'un polygone régulier. — Aire du cercle et du secteur circulaire.*

DÉFINITIONS.

268. Un *secteur circulaire* est la portion de cercle comprise entre un arc ACDB et les rayons AO, OB, menés aux extrémités de cet arc (*fig.* 176).

Un *secteur polygonal régulier* est la portion de plan comprise entre une ligne brisée régulière ACDB et les rayons OA, OB, menés du centre O de cette ligne (225) à ses extrémités. En divisant en un nombre quelconque de parties égales l'arc AB du secteur circulaire OAB et joignant les points de division, on obtient un secteur polygonal régulier OACDB inscrit dans le secteur circulaire.

Fig. 176.

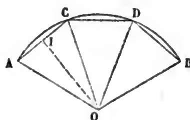
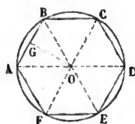


Fig. 177.



THÉORÈME.

269. *L'aire d'un polygone régulier a pour mesure le produit de son périmètre par la moitié de l'apothème* (*fig.* 177).

En effet, en joignant le centre O du polygone régulier ABCDEF à tous ses sommets, on décompose ce polygone en triangles OAB, OBC,..., OFA, qui ont respectivement pour bases les côtés AB, BC,..., FA, et pour hauteur commune l'apothème OG. La somme des aires de ces triangles, c'est-à-dire l'aire du polygone, a donc pour mesure le produit de la somme des côtés AB, BC,..., FA, par la moitié de l'apothème OG, c'est-à-dire le produit du périmètre par la moitié de l'apothème.

En désignant par S, p, a, l'aire, le périmètre et l'apothème

du polygone proposé, on a la formule

$$S = \frac{1}{2} pa.$$

SCOLIES.

270. Par un raisonnement identique à celui du n° 269, on prouverait que *l'aire d'un secteur polygonal régulier* OACDB (*fig.* 176) *a pour mesure le produit du périmètre de la ligne brisée régulière* ACDB *par la moitié de l'apothème* OI.

Le même raisonnement prouve encore que *l'aire de tout polygone circonscriptible à un cercle a pour mesure la moitié du produit de son périmètre par le rayon du cercle inscrit ;* car cette aire est la somme de tous les triangles qui ont pour sommet commun le centre du cercle inscrit et pour bases respectives les divers côtés du polygone, triangles qui ont tous pour hauteur le rayon du cercle.

THÉORÈME.

271. *L'aire d'un cercle a pour mesure le produit de sa circonférence par la moitié du rayon.*

L'aire du cercle est la limite des aires des polygones réguliers inscrits dont le nombre des côtés croît indéfiniment. D'après cela, soient S, C, R, l'aire, la circonférence et le rayon du cercle considéré, et s, p, a, l'aire, le périmètre et l'apothème d'un polygone régulier inscrit dans ce cercle. On a (269)

$$s = p . \frac{1}{2} a.$$

Lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés du polygone régulier inscrit, s tend vers S, p vers C et a vers R. On a donc, à la limite,

(1) $$S = C . \frac{1}{2} R.$$

COROLLAIRES.

272. En remplaçant dans la relation précédente la circonférence C par sa valeur

(2) $$C = 2\pi R,$$

on obtient la nouvelle formule

$$(3) \qquad S = \pi R^2,$$

qu'il faut retenir par cœur et qui montre :

1° Que, *pour calculer l'aire d'un cercle de rayon donné, il faut multiplier par π le carré du rayon ;*

2° Que, *pour calculer le rayon d'un cercle d'aire donnée, il faut multiplier par $\frac{1}{\pi}$ ou diviser par π le nombre qui exprime cette aire, et extraire la racine carrée du résultat.*

Si, au lieu d'éliminer C entre les relations (1) et (2), on élimine R, on trouve la formule

$$(4) \qquad S = \frac{C^2}{4} \cdot \frac{1}{\pi},$$

qui permet de calculer directement la surface, connaissant la circonférence; ou la circonférence, connaissant la surface. Cette formule est beaucoup moins usuelle que les précédentes.

Exemples :

1° *Quelle est l'aire d'un bassin circulaire dont le rayon est* $2^m,5$?

On a

$$S = \pi (2,5)^2 = \pi . 6,25,$$

et en prenant pour π la valeur 3,142 approchée à moins d'un millième, on trouve $S = 19^{mq},63$ à moins d'un décimètre carré.

2° *Quel est le rayon du cercle dont l'aire est de* 20 *mètres carrés ?*

La formule $\qquad \pi R^2 = 20$

donne $\qquad R = \sqrt{20 \cdot \frac{1}{\pi}} = \sqrt{20.0,31831} = 2^m,52,$

à moins d'un centimètre.

3° *Quelle est l'aire d'un cercle dont la circonférence est égale à* 10 *mètres ?*

On a

$$S = \frac{10^2}{4} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{1}{4} \cdot 31,83 = 7^{mq},96,$$

à moins d'un décimètre carré.

THÉORÈME.

273. *L'aire d'un secteur circulaire a pour mesure le produit de son arc par la moitié du rayon.*

L'aire du secteur circulaire est la limite des aires des secteurs polygonaux réguliers inscrits dont on fait croître indéfiniment le nombre des côtés. D'après cela, soient S l'aire du secteur considéré, l la longueur de l'arc qui le termine, et R le rayon de cet arc ; soient de même s l'aire d'un secteur polygonal régulier inscrit, p le périmètre de la ligne brisée régulière qui le termine, et a l'apothème de cette ligne brisée. On a (270)

$$s = p \cdot \frac{1}{2} a.$$

Mais lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée régulière inscrite, s tend vers S, p vers l, et a vers R. On a donc, à la limite,

(5) $$S = l . \frac{1}{2} R.$$

COROLLAIRES.

274. En comparant les formules (1) et (5), on voit que *le secteur est au cercle entier comme son arc est à la circonférence.*

Si n est le nombre de degrés de l'arc, le rapport de cet arc à la circonférence sera $\frac{n}{360}$, et par suite l'aire S du secteur s'obtiendra en multipliant par ce rapport l'aire πR^2 du cercle, de sorte qu'on aura

$$S = \pi R^2 \frac{n}{360}.$$

Cette formule permet de calculer l'une quelconque des quantités S, R, n, lorsqu'on connaît les deux autres.

EXEMPLES :

1° *Quelle est l'aire du secteur de* 60 *degrés dans le cercle dont le rayon est* 10 *mètres ?*

L'arc de 60 degrés étant le sixième de la circonférence, le secteur est le sixième du cercle, c'est-à-dire

$$\frac{100\pi}{6} = 52^{mq},3599,$$

à moins d'un centimètre carré.

2° *L'aire d'un secteur est égale à l'aire du carré construit sur le rayon. Quel est le nombre de degrés de l'arc qui le termine?*

La formule

$$\pi R^2 \frac{n}{360} = R^2$$

donne

$$n = \frac{360°}{\pi} = 114°35'29'',6.$$

3° *Quel est le rayon du cercle dans lequel le secteur de 45 degrés renferme* $0^{mq},1250$?

La formule

$$\pi R^2 \frac{45}{360} = 0,1250 \quad \text{ou} \quad \pi R^2 = 0,1250.8 = 1$$

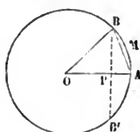
donne

$$R = \sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0^{m},564.$$

Scolie.

275. *L'aire d'un segment circulaire a pour mesure le produit de la moitié du rayon par l'excès de son arc sur la moitié de la corde de l'arc double* (*fig.* 178).

Fig. 178.



En effet, le segment AMB, c'est-à-dire la portion du cercle comprise entre l'arc AMB et sa corde AB, est égal à l'excès de l'aire du secteur OAMB sur l'aire du triangle OAB. Or, l'aire

du secteur a pour mesure arc $AB \cdot \frac{1}{2} OA$; l'aire du triangle a pour mesure $BP \cdot \frac{1}{2} OA$, BP étant la perpendiculaire abaissée du point B sur le rayon OA, c'est-à-dire la moitié de la corde BB' de l'arc BAB' qui (98) est le double de l'arc AB. On a donc, en désignant par S l'aire du segment,

$$S = \text{arc}\, AB.\ \frac{1}{2} OA - \frac{1}{2} BB'.\ \frac{1}{2} OA,$$

ou

$$S = \frac{OA}{2}\left(\text{arc}\, AB - \frac{1}{2} BB'\right).$$

Lorsque la corde BB' est le côté de l'un des polygones réguliers que l'on sait inscrire (liv. III, § V), on peut calculer directement cette corde, par suite l'aire du segment ; sinon, il faut recourir aux *tables trigonométriques*.

Exemple :

Quelle est l'aire du segment de 60 *degrés dans le cercle dont le rayon est* 2 *mètres ?*

L'arc AB est ici le sixième de la circonférence ; il est donc égal à

$$\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

La corde BB' est le côté du triangle équilatéral inscrit, égal à $2\sqrt{3}$; on a donc

$$S = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} = 0^{mq},362344,$$

à moins d'un millimètre carré.

EXERCICES.

1. La différence entre les aires du carré et de l'hexagone régulier inscrits dans un cercle est de 4^{mq}; calculer l'aire de ce cercle à un centimètre carré près.

2. L'aire d'un cercle surpassant l'aire de l'hexagone régulier inscrit de $62^{mq},25$, calculer le rayon de ce cercle à moins d'un millimètre.

3. Trouver en fonction du rayon du cercle circonscrit l'aire du dodécagone régulier.

4. L'aire de l'octogone régulier inscrit dans un cercle équivaut à celle du rectangle qui a pour côtés adjacents les côtés des carrés inscrit et circonscrit.

5. L'aire de l'hexagone régulier inscrit dans un cercle est les trois quarts de celle de l'hexagone régulier circonscrit.

6. L'aire de l'hexagone régulier inscrit est la moyenne proportionnelle des aires des triangles équilatéraux inscrit et circonscrit.

7. Étant donné un polygone régulier, on mène les diagonales qui sous-tendent successivement deux côtés; ces diagonales déterminent par leurs intersections un autre polygone dont on demande la nature, et l'aire en fonction de celle du premier polygone.

8. On prend les points B et D à égale distance des extrémités de l'arc d'un quadrant AOC, et on mène sur OC les perpendiculaires BG et DH; démontrer que la figure mixtiligne BGHD est équivalente au secteur OBD.

9. Si l'on prend un point C sur le diamètre AB d'un cercle, l'aire comprise entre ce cercle et les cercles décrits sur les segments AC et CB comme diamètres équivaut au cercle qui a pour diamètre la moyenne proportionnelle des segments AC et CB.

10. AB étant un arc de cercle de centre O et AD une perpendiculaire au rayon OB, on prend l'arc AC égal à cette perpendiculaire; démontrer que le secteur BOC est équivalent au segment ACB.

11. Si des demi-cercles sont décrits sur les trois côtés d'un triangle rectangle comme diamètres, et si l'on tourne vers l'intérieur du triangle ceux décrits sur les côtés de l'angle droit, la somme des segments extérieurs correspondants aux côtés de l'angle droit, moins la somme des segments déterminés par l'hypoténuse, équivaut à l'aire commune aux demi-cercles décrits sur les côtés.

12. Si AB et CD sont deux diamètres perpendiculaires d'un cercle O et si, du point D comme centre avec DA pour rayon, on décrit un arc de cercle AEB, démontrer que l'aire de la *lune* AEBC équivaut à celle du triangle DAB.

§ III.

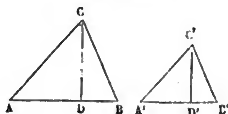
Programme officiel : *Rapport des aires de deux figures semblables.*

THÉORÈME.

276. *Le rapport des aires de deux polygones semblables est égal au carré de leur rapport de similitude,* ou *deux polygones semblables sont entre eux comme les carrés des côtés homologues.*

Soient d'abord deux triangles semblables ABC, A′B′C′ (*fig.* 179), ayant pour bases les côtés AB, A′B′, et pour hauteurs les droites CD, C′D′.

Fig. 179.



On aura (254)

$$ABC = \frac{1}{2} AB.CD, \quad A'B'C' = \frac{1}{2} A'B'.C'D',$$

d'où

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB.CD}{A'B'.C'D'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{CD}{C'D'}.$$

D'ailleurs, les deux triangles rectangles ACD, A′C′D′, étant semblables (180), on peut remplacer le rapport $\frac{CD}{C'D'}$ par son égal $\frac{AC}{A'C'}$ ou $\frac{AB}{A'B'}$, et écrire

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{AB}{A'B'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

Soient maintenant deux polygones semblables S et S′. Leur rapport de similitude, égal à celui de deux côtés homologues

quelconques AB et A′B′, sera représenté par $\frac{AB}{A'B'}$. Ces deux polygones seront décomposables en un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés (186), et le rapport de similitude de deux triangles homologues sera égal au rapport de similitude des deux polygones. Si le polygone S est composé des triangles T, T_1, T_2, et le polygone S′ des triangles homologues T′, T'_1, T'_2, on aura donc, d'après ce qui précède :

$$\frac{T}{T'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2},\quad \frac{T_1}{T'_1}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2},\quad \frac{T_2}{T'_2}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2};$$

et, par suite, en appliquant un théorème connu,

$$\frac{T+T_1+T_2}{T'+T'_1+T'_2}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2},\quad \text{ou}\quad \frac{S}{S'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

Corollaires.

277. *Le rapport des aires de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés est égal au rapport des carrés de leurs rayons ou de leurs apothèmes.*

Car deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables, et leurs côtés sont dans le rapport de leurs rayons ou de leurs apothèmes (226).

Le rapport des aires de deux cercles est égal au rapport des carrés de leurs rayons ; car ces deux cercles sont les limites des aires de deux polygones réguliers semblables dont le nombre des côtés croît indéfiniment. D'ailleurs, on peut démontrer cette proposition directement. En désignant par S et R l'aire et le rayon du premier cercle, par S′ et R′ l'aire et le rayon du second cercle, on a en effet

$$S=\pi R^2,\quad S'=\pi R'^2,\quad \text{d'où}\quad \frac{S}{S'}=\frac{R^2}{R'^2}.$$

On voit de même que *le rapport des aires de deux secteurs semblables,* c'est-à-dire terminés par des arcs semblables (241), *est égal au rapport des carrés de leurs rayons* (274).

PROBLÈME.

278. *Deux figures semblables étant données, construire une figure semblable égale à leur somme ou à leur différence.*

S'il s'agit de deux carrés dont les côtés soient a et b ($a>b$), le côté x du carré égal à leur somme sera l'hypoténuse du triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit a et b; le côté y du carré égal à leur différence sera le second côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant a pour hypoténuse et b pour premier côté de l'angle droit (262).

S'il s'agit de deux polygones semblables A et B ($A>B$), dont deux côtés homologues quelconques soient a et b, le côté homologue x du polygone semblable $X=A+B$ sera l'hypoténuse du triangle rectangle construit sur a et b comme côtés de l'angle droit; le côté homologue y du polygone semblable $Y=A-B$ sera le second côté de l'angle droit du triangle rectangle ayant a pour hypoténuse et b pour premier côté de l'angle droit.

En effet, on a (276)

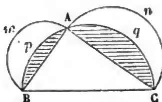
$$\frac{A}{a^2}=\frac{B}{b^2}=\frac{X}{x^2}=\frac{Y}{y^2}=\frac{A+B}{a^2+b^2}=\frac{A-B}{a^2-b^2}.$$

Donc, puisqu'on a $X=A+B$ et $Y=A-B$, on doit avoir

$$x^2=a^2+b^2, \quad \text{et} \quad y^2=a^2-b^2.$$

Dans le cas de deux cercles ayant R et R′ pour rayons, il suffira de remplacer dans ce qui précède a et b par R et R′, pour trouver les rayons x et y des cercles égaux respectivement à la somme ou à la différence des deux cercles donnés.

Fig. 180.



SCOLIE.

279. Il résulte du dernier alinéa que si, sur les trois côtés d'un triangle rectangle ABC (*fig.* 180) comme diamètres, on

décrit des demi-cercles, le demi-cercle décrit sur l'hypotenuse sera équivalent à la somme des demi-cercles décrits sur les côtés de l'angle droit. En enlevant de part et d'autre les parties communes A*p*B, A*q*C, qui sont ombrées sur la figure, on voit que la somme des deux *lunules* A*m*B*p*A, A*n*C*q*A, est équivalente à l'aire du triangle rectangle ABC. Cette proposition est attribuée à Hippocrate.

EXERCICES.

1. On donne un triangle rectangle sur les côtés duquel on construit trois carrés; on joint les sommets consécutifs de ces carrés, et l'on demande l'expression de l'aire de la figure totale ainsi formée.

2. Un triangle étant donné, partager sa surface en moyenne et extrême raison par une parallèle à sa base.

3. Sur les côtés AB, AC, d'un triangle ABC, on construit des parallélogrammes quelconques ABDE, ACFG, dont on prolonge les côtés DE et FG jusqu'à leur rencontre au point H; démontrer que la somme des aires de ces deux parallélogrammes équivaut à l'aire du parallélogramme qui a pour côtés adjacents BC et une droite égale et parallèle à AH. — Déduire de ce théorème celui du carré de l'hypoténuse.

4. On donne un quadrant AOB et un point P quelconque sur l'arc AB; par ce point P, on mène à cet arc la tangente STP : S est son point d'intersection avec le rayon OA, T avec le rayon OB. On mène PM perpendiculaire sur OA, et l'on demande de prouver que le triangle AOB est la moyenne proportionnelle des triangles SOT et OMP.

5. Sur les côtés AB, AC, d'un triangle ABC, on marque deux points M et N, et sur la droite MN un point P, tels qu'on ait

$$\frac{BM}{AM} = \frac{AN}{CN} = \frac{PM}{PN};$$

démontrer que le triangle BPC équivaut au double du triangle AMN.

6. Par le milieu de chacune des deux diagonales d'un quadrilatère, on mène une parallèle à l'autre, et l'on joint le point d'intersection de ces deux parallèles aux milieux des quatre côtés; démontrer que le quadrilatère est ainsi partagé en quatre parties équivalentes.

7. Démontrer que la surface du triangle formé avec les médianes d'un triangle donné est les trois quarts de la surface de ce triangle. — En déduire : 1° qu'entre tous les triangles qui ont la somme de leurs médianes constante, le triangle équilatéral est maximum; 2° que de tous les triangles équivalents, le triangle équilatéral est celui dans lequel la somme des médianes est minimum.

8. Dans des cercles différents, les secteurs dont les angles sont en raison inverse des carrés des rayons sont équivalents.

9. La différence de deux secteurs semblables a pour mesure de son aire le produit de la différence des rayons par l'arc concentrique mené à égale distance des arcs considérés.

10. On donne une corde AB dans un cercle O; si, sur le rayon OA qui passe par une de ses extrémités pris comme diamètre, on décrit un cercle, les segments sous-tendus dans les deux cercles par la corde AB sont dans le rapport de 4 à 1.

11. Dans un triangle rectangle ABC, AD étant la perpendiculaire abaissée du sommet sur l'hypoténuse, démontrer que les cercles inscrits dans les triangles ABD, ACD, sont proportionnels à ces triangles.

12. On donne deux droites qui se coupent en A, et l'on décrit une série de cercles tous tangents à ces deux droites et successivement tangents entre eux; OA étant la distance du centre du cercle le plus éloigné au point A, et OB son rayon, la somme des aires de tous les cercles est à l'aire du plus éloigné dans un rapport exprimé par $\frac{(OA + OB)^2}{4OA.OB}$.

QUESTIONS PROPOSÉES

SUR LE QUATRIÈME LIVRE.

1. On donne un triangle ABC; aux points B et C, et d'un même côté de BC, on mène à cette droite des perpendiculaires BD et CE qu'on prend égales à deux fois la hauteur du triangle ABC. Les points F et G étant les milieux des côtés AB et AC, démontrer que le triangle ABC est équivalent à la somme ou à la différence des triangles BDF, CEG, suivant que ses angles en B et en C sont ou non tous les deux aigus.

2. On donne un rectangle ABCD; on prend un point quelconque E sur BC, un point quelconque F sur CD. Démontrer que le rectangle ABCD équivaut au double du triangle AEF, augmenté du rectangle ayant pour dimensions les segments BE et DF.

3. Tout rectangle est moitié du rectangle qui a pour dimensions les diagonales des carrés construits sur ses côtés adjacents.

4. Dans un triangle ABC, le côté AC est double du côté BC; on mène les bissectrices CD et CE de l'angle C du triangle et de son supplément formé en prolongeant AC. Démontrer que les aires des triangles CBD, ACD, ABC, CDE, sont dans le rapport des nombres 1, 2, 3, 4.

5. Si, des sommets C et D d'un quadrilatère ABCD et de l'intersection E de ses diagonales, des perpendiculaires CF, DG, EH, sont menées au côté AB, l'aire du quadrilatère a pour expression

$$\frac{1}{2}\,\text{AB}.\frac{\text{CF}.\text{DG}}{\text{EH}}.$$

6. Démontrer que l'aire d'un triangle en fonction de ses médianes α, β, γ, est exprimée par la formule

$$S = \frac{1}{3}\sqrt{2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4}.$$

7. Étant données les trois hauteurs h, h', h'', d'un triangle, trouver ses trois côtés et sa surface.

8. Deux triangles ont un sommet commun; quel est le lieu décrit par ce sommet lorsque, les deux bases restant fixes, la somme ou la différence des aires des deux triangles demeure constante ? — Discussion.

9. Si dans la *fig.* 172 du n° 262 on joint les points E et G, F et H, K et D, on forme un hexagone; démontrer que la somme des carrés construits sur les côtés de cet hexagone est égale à huit fois le carré construit sur l'hypoténuse BC du triangle ABC.

10. Si l'on construit des carrés sur les trois côtés d'un triangle quelconque, et si l'on joint les sommets consécutifs de ces carrés, on forme un hexagone; démontrer que la somme des carrés construits sur les côtés de cet hexagone équivaut à quatre fois la somme des carrés construits sur les côtés du triangle donné. — Déduire de ce théorème le précédent.

11. Soit un triangle quelconque ABC; on mène BD perpendiculaire et égale à AB, CE perpendiculaire et égale à AC, et l'on tire DE. Démontrer que la somme des carrés construits sur BC et sur DE équivaut à deux fois la somme des carrés construits sur les côtés AB et AC.

12. Si deux polygones semblables et intérieurs l'un à l'autre ont leurs côtés homologues parallèles, tout polygone à la fois inscrit dans l'un et circonscrit à l'autre a une aire moyenne proportionnelle entre les aires de ces deux polygones.

13. Si, sur l'hypoténuse BC d'un triangle rectangle isocèle ABC comme diamètre, on décrit un demi-cercle BDAEC et si, du point A comme centre avec AB pour rayon, on décrit l'arc BFC, démontrer que le segment BFC équivaut à la somme des segments BDA, CEA.

14. Des demi-cercles OEDA, OFDB, étant décrits sur les rayons OA, OB, d'un quadrant OACB, démontrer : 1° que les trois points A, B, D, sont en ligne droite; 2° que les aires ACBD, OEDF, sont équivalentes; 3° que les aires OFDA, OEDB, équivalent chacune au quart du carré construit sur le rayon OA.

15. Si le diamètre d'un cercle est divisé en n parties égales aux points P_1, P_2, etc., et si l'on décrit des demi-cercles au-dessus de AB sur les diamètres AP_1, AP_2, etc., et au-dessous de AB sur les diamètres BP_1, BP_2, etc., le contour de chaque figure telle que $AP_{m-1}BP_m$ est égal à la circonférence du cercle donné, et l'aire de la même figure à la $n^{ième}$ partie de celle du cercle donné.

16. Partager un triangle en parties proportionnelles à des droites données par des parallèles à sa base.

17. Partager un trapèze en parties proportionnelles à des droites données par des parallèles aux bases.

18. Partager un triangle en trois triangles équivalents par trois droites menées d'un même point intérieur à ses trois sommets.

19. Par un point pris dans le plan d'un angle donné, mener une droite telle, que le triangle qu'elle détermine par sa rencontre avec les côtés de l'angle soit équivalent à un carré donné.

20. Inscrire dans un triangle donné un parallélogramme ayant une aire donnée. — Discussion.

21. Inscrire dans un cercle donné un rectangle d'aire donnée.

22. Construire un triangle, connaissant ses angles et son aire.

23. Après avoir inscrit un carré dans un carré donné, on en inscrit un troisième dans le second obtenu, et ainsi de suite indéfiniment, en adoptant toujours la même loi d'inscription.

On demande : 1° la limite vers laquelle tend la somme des carrés inscrits; 2° combien il faut construire de carrés inscrits pour que leur somme soit équivalente à une aire donnée.

24. Étant donné un triangle, on en forme un second en joignant les milieux de ses trois côtés, un troisième en joignant les milieux des trois côtés du second, et ainsi de suite indéfiniment. On demande la limite de la somme de tous les triangles inscrits de cette manière.

25. Construire un triangle équivalent à un triangle donné et tel, que ses sommets soient respectivement situés sur trois droites données.

26. Décrire quatre circonférences qui soient en proportion, dont la plus grande soit égale à la somme des trois autres, et telles que leur somme et la somme des cercles correspondants soient respectivement égales à une circonférence et à un cercle donnés.



GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

LIVRE V.

LE PLAN.

§ I.

Programme officiel : *Du plan et de la ligne droite dans l'espace.*

DÉFINITIONS.

280. On sait qu'un plan est une surface telle, qu'une ligne droite y est contenue tout entière dès qu'elle y a deux points (5). Cette surface est illimitée ; toutefois, pour la représenter, on est obligé de lui assigner des limites : on représente un plan par une figure tracée dans ce plan, le plus souvent par un parallélogramme.

281. On dit qu'une droite CC′ et un plan P *se coupent* (*fig.* 181) lorsqu'ils n'ont qu'un point commun D ; ce point divise la droite CC′ en deux parties DC et DC′ situées de part et d'autre du plan P.

Fig. 181.

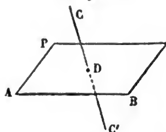
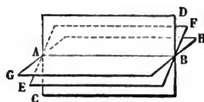


Fig. 182.



THÉORÈME.

282. *Par une ligne droite* AB *et par un point* C *extérieur à cette droite, on peut faire passer un plan, et on ne peut en faire passer qu'un ;* en d'autres termes, *une droite et un point extérieur à cette droite déterminent un plan* (*fig.* 182).

En effet, un plan assujetti à la seule condition de contenir la droite AB peut tourner autour de cette droite, comme une porte sur ses gonds, de manière à venir passer par le point C; puis, si la rotation continue, le plan ne contient plus le point C. Donc, de tous les plans en nombre infini qui passent par la droite AB, il en est un, et un seul, qui renferme le point C.

COROLLAIRES.

283. *Trois points* A, B, C, *non situés en ligne droite, déterminent un plan;* car le plan P, déterminé par la droite AB et le point C, renferme les trois points A, B, C; et, réciproquement, tout plan qui contient ces trois points ne diffère pas du plan P, puisqu'il passe par la droite AB et le point C.

284. *Deux droites* AB *et* AC *qui se coupent déterminent un plan;* car le plan P, déterminé par la droite AB et le point C, renferme les droites AB et AC; et, réciproquement, tout plan qui contient ces deux droites ne diffère pas du plan P, puisqu'il passe par la droite AB et le point C.

285. *Deux droites parallèles déterminent un plan;* car deux parallèles sont toujours, par définition, situées dans un même plan; et ce plan est le seul qui les contienne, puisqu'on ne peut mener qu'un plan par la première droite et par un point de la seconde.

Il résulte de là que, *par un point, on ne peut mener dans l'espace qu'une parallèle à une droite donnée;* car toute parallèle menée à cette droite par ce point doit être située dans le plan que cette droite et ce point déterminent, et l'on sait que, dans un plan, on ne peut mener par un point qu'une parallèle à une droite.

THÉORÈME.

286. *L'intersection de deux plans est une ligne droite.*

Car, si sur la ligne commune aux deux plans on pouvait trouver trois points non en ligne droite, les deux plans coïncideraient (283), au lieu d'être distincts comme on le suppose.

287. *L'intersection de trois plans est,* en général, *un point;* c'est le point où la droite commune aux deux premiers plans coupe le troisième.

§ II.

Programme officiel : *Parallélisme des droites et des plans.*

DÉFINITIONS.

288. Deux droites prises arbitrairement dans l'espace ne sont pas en général situées dans un même plan. Or, deux droites non situées dans un même plan ne peuvent ni se rencontrer (284) ni être parallèles (285). On voit par là que, pour prouver le parallélisme de deux droites, il ne suffira plus désormais d'établir qu'elles ne se rencontrent pas; il faudra montrer en outre qu'elles sont dans un même plan.

289. Une droite et un plan sont dits *parallèles* lorsqu'ils ne peuvent avoir aucun point commun.

Deux plans sont dits *parallèles* lorsqu'ils ne peuvent avoir aucun point commun.

THÉORÈME.

290. *Si une droite* CD *est située dans un plan* P, *toute parallèle* AB *à cette droite est parallèle à ce plan ou située dans ce plan* (*fig.* 183 et 184).

En effet, le plan Q des deux parallèles AB et CD coïncide avec le plan P ou le coupe suivant la droite CD. Dans le premier cas (*fig.* 183), la droite AB appartient tout entière au plan P. Dans le second cas (*fig.* 184), la droite AB est parallèle au plan P; car si elle rencontrait ce plan, ce ne pourrait être qu'en un point de CD, et alors elle couperait CD contrairement à l'hypothèse.

Fig. 183.

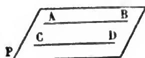
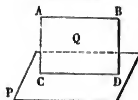


Fig. 184.



THÉORÈME.

291. *Si par une droite* AB *parallèle à un plan* P *on mène un plan* Q *qui coupe le plan* P, *l'intersection* CD *est parallèle à* AB (*fig.* 184).

En effet, les droites AB et CD sont dans un même plan Q; et AB, qui est parallèle au plan P, ne saurait rencontrer CD, qui appartient tout entière à ce plan P. Donc les droites AB et CD sont parallèles.

COROLLAIRES.

292. *L'intersection* AA' *de deux plans* BB'A'A, CC'A'A, *menés par deux droites parallèles* BB', CC', *est parallèle à chacune de ces droites* (*fig.* 187).

En effet, la droite BB' étant parallèle à CC' est parallèle au plan CC'A'A (290); par suite, l'intersection AA' de ce plan et du plan BB'A'A, mené par BB', est parallèle à BB' (291). On verrait de même que AA' est parallèle à CC'.

293. *Deux droites* AA', BB', *parallèles à une troisième* CC', *sont parallèles entre elles* (*fig.* 187).

En effet, A étant un point pris à volonté sur AA', les plans ABB', ACC', conduits suivant les parallèles BB' et CC', doivent se couper suivant une droite passant par A et parallèle à la fois à BB' et à CC' (292). Cette intersection n'est donc autre que AA', puisque par A on ne peut mener qu'une parallèle AA' à CC' (285); donc enfin AA' est parallèle à BB'.

294. *Les parallèles* AC *et* BD *comprises entre une droite* CD *et un plan* P *parallèles sont égales* (*fig.* 185).

En effet, le plan Q des deux parallèles AC et BD coupe le plan P suivant une droite AB parallèle à CD (291). Donc AC et BD sont égales comme parallèles comprises entre parallèles (67).

Fig. 185.

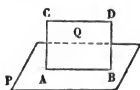


Fig. 186.

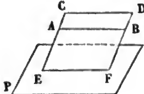
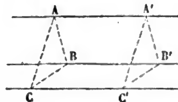


Fig. 187.



THÉORÈME.

295. *Si une droite* CD *est parallèle à un plan* P, *toute parallèle* AB *à cette droite est parallèle à ce plan ou située dans ce plan* (*fig.* 185 et 186).

En effet, le plan ABCD ne peut couper le plan P que suivant

une parallèle à CD (291); puisque AB et CD sont parallèles, cette intersection est la droite AB elle-même (*fig.* 185), ou (293) une parallèle EF à AB (*fig.* 186). Donc AB est située dans le plan P ou lui est parallèle.

Ce théorème est la généralisation de celui du n° 290.

COROLLAIRE.

296. *L'intersection de deux plans parallèles à une même droite est parallèle à cette droite;* car si, par un point commun aux deux plans, on mène la parallèle à la droite considérée, cette parallèle doit (295) appartenir à chacun des deux plans.

THÉORÈME.

297. *Deux angles qui ont leurs côtés respectivement parallèles sont égaux ou supplémentaires, et leurs plans sont parallèles.*

1° Deux angles BAC, B'A'C', dont les côtés AB et A'B', AC et A'C' sont deux à deux parallèles et de même sens, sont égaux (*fig.* 187).

En effet, prenons A'B' = AB, A'C' = AC, et menons AA', BB', CC', BC, B'C'. Les deux droites AB et A'B' étant égales et parallèles, la figure AB B'A' est un parallélogramme, et, par suite, BB' est égale et parallèle à AA'. On verrait de même que CC' est égale et parallèle à AA'. Donc (293) BB' et CC' sont égales et parallèles, la figure BB'C'C est un parallélogramme, et BC = B'C'. Les triangles ABC, A'B'C', étant égaux comme ayant leurs côtés égaux chacun à chacun, les angles BAC, B'A'C', sont égaux.

On déduit de là, comme en Géométrie plane, que deux angles dont les côtés sont deux à deux parallèles et de sens contraire sont égaux, et que deux angles qui ont deux côtés parallèles et de même sens et deux côtés parallèles et de sens contraire sont supplémentaires.

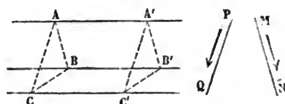
2° Les plans BAC, B'A'C', sont parallèles.

En effet, AB étant parallèle à A'B' est parallèle au plan B'A'C' (290); donc si le plan BAC rencontrait le plan B'A'C', l'intersection serait parallèle à AB (291). AC étant parallèle à A'C', on verrait de même que l'intersection des deux plans serait parallèle à AC. Donc, par le point A, on pourrait mener deux parallèles AB et AC à l'intersection, ce qui est impossible (285).

COROLLAIRE.

298. Pour *mener par un point donné* A *un plan* BAC *parallèle à un plan donné* B'A'C', il suffit de tracer dans ce plan deux droites qui se coupent A'B', A'C', et de mener par A des parallèles AB et AC à ces deux droites. Ces parallèles déterminent le plan demandé.

Fig. 188.



SCOLIE.

299. Sur une droite quelconque MN (*fig.* 188), on doit distinguer deux sens : le sens de MN et le sens contraire, celui de NM.

On appelle *angle de deux droites* dont la position dans l'espace et le sens sont donnés, l'angle que l'on forme en menant par un point quelconque, à chacune des droites données, une droite parallèle et de même sens. Ainsi MN et PQ étant les deux droites données, par un point quelconque A de l'espace, menons AB parallèle à MN et de même sens, AC parallèle à PQ et de même sens ; l'angle BAC sera, par définition, l'angle des deux droites MN et PQ.

Pour que cette définition n'offre rien de contradictoire, il faut que la grandeur de l'angle ainsi obtenu soit indépendante de la position du point par lequel on mène des parallèles aux deux droites données. Or, soient BAC et B'A'C' les valeurs obtenues pour l'angle de MN et de PQ en menant à ces droites des parallèles par deux points différents A et A'. Les droites AC et A'C' étant chacune parallèles à MN et de même sens que cette droite sont parallèles et de même sens (293); il en est de même pour AB et A'B'; par suite, les deux angles BAC, B'A'C', sont égaux (297, 1°).

300. On dit que deux droites non situées dans le même plan sont *perpendiculaires* l'une à l'autre, lorsque leur angle (299) est droit.

On voit, par la définition même de l'angle de deux droites, que, lorsque deux droites sont perpendiculaires entre elles, toute parallèle à l'une est perpendiculaire à l'autre.

THÉORÈME.

301. *Les intersections* A *et* B *de deux plans parallèles* P *et* Q *par un troisième plan* R *sont parallèles* (*fig.* 189).

En effet, les droites A et B sont dans un même plan R, et elles ne se rencontrent pas, puisque les plans P et Q n'ont aucun point commun ; donc elles sont parallèles.

Fig. 189.

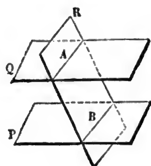
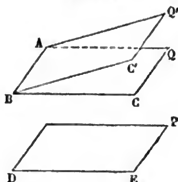


Fig. 190.



COROLLAIRES.

302. *Par un point* A, *on ne peut mener qu'un plan parallèle à un plan donné* P (*fig.* 190).

En effet, supposons qu'on puisse en mener deux Q et Q', et soit AB leur intersection. Dans le plan Q menons une droite BC différente de AB, et par cette droite BC et un point quelconque D du plan P, concevons un plan auxiliaire; soient BC' et DE les droites suivant lesquelles ce plan auxiliaire coupe les plans Q' et P.

D'après le théorème précédent (301), BC et DE seraient parallèles, et il en serait de même de BC' et de DE. On pourrait donc par le point A mener deux parallèles BC et BC' à DE, ce qui est impossible (285).

303. *Deux plans parallèles à un troisième sont parallèles entre eux;* car, s'ils se rencontraient, on pourrait, par un point de leur intersection, mener deux plans parallèles à un même plan, ce qui est impossible (302).

THÉORÈME.

304. *Si deux plans* P *et* Q *sont parallèles, toute droite* D *parallèle au plan* P *est parallèle au plan* Q *ou située dans ce plan.*

En effet, un plan quelconque mené par la droite D coupera le plan P suivant une droite D′ qui sera parallèle à D (291), et qui sera aussi parallèle au plan Q, attendu que, les plans P et Q étant parallèles, toute droite D′ du premier est parallèle au second. Donc, la droite D étant parallèle à une droite D′, qui est parallèle au plan Q, sera (295) parallèle à ce plan ou située dans ce plan.

COROLLAIRE.

305. *Si par un point* A *extérieur à un plan* P, *on mène des droites parallèles à ce plan, le lieu de ces parallèles est le plan* Q *mené par* A *parallèlement au plan* P; car l'une quelconque AC de ces parallèles doit n'avoir aucun point commun avec le plan Q ou y être contenue tout entière (304); et c'est ce dernier cas qui a lieu ici, puisque la droite AC a déjà un point commun A avec le plan Q.

Fig. 191.

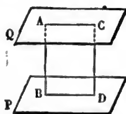
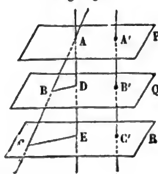


Fig. 192.



THÉORÈME.

306. *Les parallèles* AB *et* CD *comprises entre deux plans parallèles* P *et* Q *sont égales* (*fig.* 191).

En effet, le plan des deux parallèles AB, CD, coupe les plans P et Q suivant deux droites AC et BD parallèles entre elles (301); donc AB et CD sont égales comme parallèles comprises entre parallèles.

COROLLAIRE.

307. *Deux droites quelconques* AC, A′C′ (*fig.* 192), *sont*

coupées par trois plans parallèles P, Q, R, *en parties proportionnelles;* en d'autres termes, si A, B, C, sont les points où les plans P, Q, R, rencontrent la première droite AC, et A', B', C', les points où les mêmes plans coupent la seconde droite A'C', on a

$$(1) \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

En effet, menons par A la parallèle à A'C', et désignons par D, E, les points où elle coupe les plans Q et R. Les droites BD et CE étant parallèles (301), on a (169)

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}.$$

Mais les segments AD, DE, AE, sont respectivement égaux à A'B', B'C', A'C', comme parallèles comprises entre plans parallèles (306). La relation (1) est donc démontrée.

Deux droites concourantes AC, AE, étant divisées en parties proportionnelles par le point A et les plans parallèles Q et R, il en sera de même évidemment pour une série de sécantes partant du point A.

EXERCICES.

1. Dans tout quadrilatère gauche, c'est-à-dire dont les côtés ne sont pas situés dans un plan unique, les milieux des côtés sont les sommets d'un parallélogramme.

2. Par une droite donnée, on peut mener un plan parallèle à une autre droite donnée, et on n'en peut mener qu'un.

3. Par un point donné, on peut mener un plan parallèle à deux droites données, et on n'en peut mener qu'un.

4. Mener une droite qui soit parallèle à une droite donnée, et qui rencontre deux droites données non situées dans un même plan.

5. Démontrer que deux droites qui sont parallèles à un plan donné, et qui rencontrent deux autres droites placées d'une manière quelconque dans l'espace, ne sont pas en général dans un même plan.

6. Une droite se déplace en restant parallèle à un plan donné et en s'appuyant sur deux droites placées d'une manière quelconque dans l'espace; quel est le lieu des points qui divisent la droite mobile dans un rapport donné?

7. Entre deux droites données d'une manière quelconque dans l'espace, mener une droite parallèle à un plan donné et ayant une longueur donnée.

§ III.

Programme officiel : *Perpendiculaire et obliques au plan.*

DÉFINITIONS.

308. On dit qu'une droite et un plan sont *perpendiculaires l'un à l'autre,* lorsque cette droite est perpendiculaire (300) à toutes les droites du plan.

Une droite est dite *oblique* à un plan, lorsqu'elle rencontre ce plan sans lui être perpendiculaire.

Fig. 193.

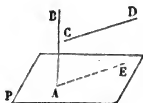


Fig. 194.

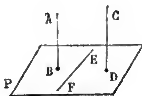
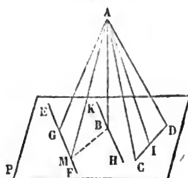


Fig. 195.



THÉORÈME.

309. *Si une droite* AB *est perpendiculaire au plan* P, *toute parallèle* CD *au plan* P *est perpendiculaire à la droite* AB (*fig.* 193).

En effet, si par le point A, où AB rencontre le plan P, on mène AE parallèle à CD, cette droite AE sera contenue dans le plan P (295); par suite (308), l'angle BAE sera droit, et comme cet angle est égal à l'angle des deux droites AB et CD (299), on voit que ces deux droites sont perpendiculaires l'une à l'autre.

310. Réciproquement, *si une droite* AB *est perpendiculaire à un plan* P, *toute perpendiculaire* CD *à la droite* AB *est parallèle au plan* P *ou située dans ce plan.*

En effet, menons par le point A la parallèle AE à CD : l'angle BAE sera droit. Par suite, la droite AE sera contenue dans le plan P, car sans cela le plan BAE couperait le plan P suivant une perpendiculaire à AB (308), et l'on aurait au point A, dans le plan BAE, deux perpendiculaires sur BA, ce qui est impos-

sible. Dès lors, la droite CD étant parallèle à une droite AE du plan P, est parallèle à ce plan ou située dans ce plan (295).

COROLLAIRE.

311. *Si deux plans* P *et* Q *sont parallèles, toute droite* D *perpendiculaire à l'un* P *est perpendiculaire à l'autre* Q; ou plus brièvement, *deux plans parallèles ont leurs perpendiculaires communes.*

En effet, toutes les droites du plan Q, étant parallèles au plan P, sont perpendiculaires à la droite D (309), qui, par suite, est perpendiculaire au plan Q (308).

SCOLIE.

312. *Si une droite* AB *est perpendiculaire à un plan* P, *toute parallèle* CD *à cette droite est perpendiculaire à ce plan* (*fig.* 194); en d'autres termes, *deux droites parallèles ont leurs plans perpendiculaires communs.*

En effet, toute droite EF du plan P, étant perpendiculaire à AB, est (300) aussi perpendiculaire à sa parallèle CD, qui, par suite, est perpendiculaire au plan P.

THÉORÈME.

313. *Par un point donné* A *on peut toujours mener une droite perpendiculaire à un plan donné* P, *et on ne peut en mener qu'une.*

1° Supposons le point A extérieur au plan P (*fig.* 195).

La distance du point A à un point quelconque M du plan P varie avec la position du point M dans ce plan; car si le point M se déplace, par exemple, sur une droite EF du plan P, la longueur AM croît à mesure que le point M s'écarte du pied G de la perpendiculaire AG, abaissée du point A sur la droite EF dans le plan AEF (40). Cette distance variable du point A aux divers points du plan P ne peut évidemment devenir aussi petite que l'on veut, puisque le point A est hors du plan P; donc elle ne descend pas au-dessous d'une certaine limite, en d'autres termes, elle est susceptible d'un minimum. D'ailleurs, parmi les droites qui unissent le point A aux divers points du plan P, il n'en est qu'une qui possède cette longueur minimum, car cette longueur minimum ne saurait appartenir

à deux droites égales, telles que AC et AD, puisque la médiane AI du triangle isocèle ACD est moindre que chacune d'elles. Enfin, cette droite unique AB, de longueur minimum, dont nous venons de prouver l'existence, est perpendiculaire à une droite quelconque EF du plan. En effet, en menant par le point B, où AB perce le plan P, la parallèle BH à EF, on forme un angle ABH égal à celui des deux droites BA et EF (299); or, cette parallèle BH est située dans le plan BEF, c'est-à-dire dans le plan P; de plus, la droite AB, plus courte distance du point A au plan P, est en particulier la plus courte distance du point A à la droite KBH de ce plan; donc AB est perpendiculaire à BH, et, par suite, à EF. Ainsi on peut mener du point A une droite AB qui soit perpendiculaire à une droite quelconque du plan P, c'est-à-dire (308) qui soit perpendiculaire à ce plan.

On ne peut en mener qu'une. En effet, toute autre droite AM issue du point A est oblique au plan P, puisque, le triangle AMB étant rectangle en B, l'angle AMB est aigu.

Fig. 195.

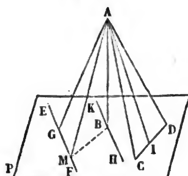
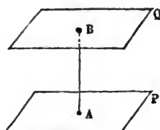


Fig. 196.



2° Supposons le point A situé dans le plan P (*fig.* 196).

Soit Q un plan parallèle à P. Les plans parallèles P et Q ayant leurs perpendiculaires communes (311), dire que par le point A on peut élever une perpendiculaire au plan P et qu'on ne peut en élever qu'une, c'est dire que du point A on peut abaisser une perpendiculaire sur le plan Q, et qu'on ne peut en abaisser qu'une; or c'est ce que nous venons d'établir (1°).

Corollaire.

314. *Deux droites* AB *et* CD *perpendiculaires à un même plan* P *sont parallèles* (*fig.* 194); car si l'on imagine par un point quelconque C de CD la parallèle à AB, cette parallèle sera perpendiculaire au plan P (312); elle coïncidera donc avec CD,

puisque du point C on ne peut mener qu'une perpendiculaire au plan P (313).

SCOLIES.

315. En Géométrie, le mot *distance* est toujours synonyme de *plus courte distance*. D'après cela, il résulte du raisonnement fait au n° 313 (1°), que *la distance d'un point* A *à un plan* P *est la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan.*

Il résulte de là, ainsi que des n°s 294, 306 et 314, que: 1° *une droite et un plan parallèles sont partout équidistants;* 2° *deux plans parallèles sont partout équidistants.*

316. On appelle *projection* d'un point A sur un plan P (*fig.* 197) le pied *a* de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan. La projection d'une ligne quelconque ABC... sur un plan P est le lieu des projections *a*, *b*, *c*,..., des divers points de cette ligne.

Fig. 197.

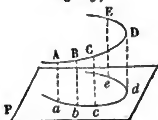
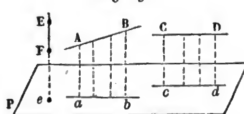


Fig. 198.



La projection d'une ligne droite AB *sur un plan* P *est une ligne droite* (*fig.* 198); car toutes les perpendiculaires A*a*, B*b*,..., abaissées sur le plan P des divers points de la droite AB sont parallèles (314); leur lieu est donc un plan (285), et, par suite, le lieu de leurs pieds est la droite *ab* suivant laquelle ce plan coupe le plan P.

Lorsque la droite donnée est, comme EF, perpendiculaire au plan P, sa projection sur ce plan se réduit à un point *e*. Lorsque cette droite est, comme CD, parallèle au plan P, elle est parallèle à sa projection *cd* (291).

THÉORÈME.

317. *Par un point donné* A, *on peut toujours mener un plan perpendiculaire sur une droite donnée* XY, *et on ne peut en mener qu'un.*

1° Supposons le point A situé sur la droite XY (*fig.* 200).

Considérons à part un plan Q (*fig.* 199), et la perpendiculaire HO élevée sur ce plan par l'un de ses points H pris à volonté; puis transportons cette figure tout d'une pièce, de manière que la droite OH s'applique sur la droite XY de la *fig.* 200, et que le point H tombe en A; le plan Q, dans sa nouvelle position P, sera un plan perpendiculaire à XY au point A.

On ne peut en mener qu'un. En effet, soient AB et AC (*fig.* 200) deux droites menées par le point A à angle droit sur XY; tout plan perpendiculaire à XY au point donné A doit (310) contenir chacune des droites AB et AC; or, par ces deux droites on ne peut conduire qu'un seul plan (284).

2° Supposons le point A extérieur à la droite XY (*fig.* 201). Soit UZ la parallèle à XY menée par A. Les droites parallèles XY et UZ ayant leurs plans perpendiculaires communs (312), dire que par le point A on peut abaisser un plan perpendiculaire sur XY et qu'on ne peut en abaisser qu'un, c'est dire que par le point A on peut élever un plan perpendiculaire sur UZ et qu'on ne peut en élever qu'un; or c'est ce que nous venons d'établir (1°).

Fig. 199.

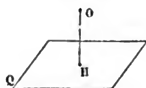


Fig. 200.

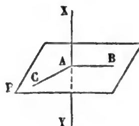
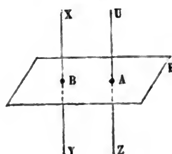


Fig. 201.



COROLLAIRE.

318. *Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles;* car s'ils se rencontraient, d'un point de leur intersection on pourrait mener deux plans perpendiculaires sur la même droite, ce qui est impossible (317).

SCOLIES.

319. *Le lieu géométrique des perpendiculaires que l'on peut mener à une droite* AB *par un point* C *est le plan* P *mené par ce point perpendiculairement à la droite* AB (*fig.* 202); car l'une quelconque CD de ces perpendiculaires doit (310) n'avoir aucun point commun avec le plan P ou y être contenue tout

entiere : c'est ce dernier cas qui a lieu ici, puisque la droite CD a déjà un point C commun avec le plan P.

320. *Le lieu des points de l'espace équidistants des extrémités d'une droite* XY *est le plan élevé perpendiculairement sur le milieu de cette droite* (*fig.* 200). En effet, dans un plan quelconque XYB passant par XY, le lieu des points équidistants des extrémités de cette droite est la perpendiculaire AB élevée dans ce plan sur le milieu A de XY; or, on vient de voir que le lieu des diverses perpendiculaires élevées sur XY par le point A est le plan mené par ce point perpendiculairement à XY.

THÉORÈME.

321. *Une droite* AB *est perpendiculaire à un plan* P, *lorsqu'elle est perpendiculaire à deux droites* CD *et* CE *de ce plan non parallèles entre elles* (*fig.* 202).

En effet, le plan conduit par le point C perpendiculairement à AB contient les deux droites CD et CE (319), qui sont des perpendiculaires à AB menées par le point C; ce plan coïncide donc avec le plan P, qui par suite est perpendiculaire à AB.

Fig. 202.

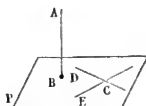
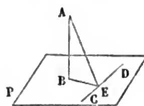


Fig. 203.



COROLLAIRE.

322. *Si du pied* B *d'une perpendiculaire* AB *à un plan* P *on mène la perpendiculaire* BE *sur une droite quelconque* CD *de ce plan, la droite* AE *qui joint le point* E *à un point quelconque de* AB *sera perpendiculaire sur* CD (*fig.* 203).

En effet, la droite CD étant perpendiculaire à BE par construction, et à AB puisque AB est perpendiculaire au plan P, doit être perpendiculaire au plan ABE (321), et par suite à la droite AE de ce plan.

Cette proposition est connue sous le nom de *théorème des trois perpendiculaires.*

De ce que l'angle BEC était droit (*fig.* 203), nous avons conclu que l'angle AEC l'était aussi. Inversement, si l'on prenait pour hypothèse que l'angle AEC est droit, on en conclurait qu'il en est de même de l'angle BEC; car CD étant alors perpendiculaire à AB et à AE le serait au plan ABE, et par suite à BE.

On peut donner du théorème des trois perpendiculaires et de sa réciproque l'énoncé suivant, qui est beaucoup plus commode dans les applications :

La projection BEC *d'un angle droit* AEC *sur un plan passant par l'un de ses côtés est un angle droit.* Inversement, *un angle* AEC *est droit s'il se projette suivant un angle droit* BEC *sur un plan renfermant un de ses côtés.*

Enfin, en ayant égard à la définition du n° 300, et remarquant que les projections d'une même droite sur deux plans parallèles sont parallèles (301), on obtient cette proposition plus générale :

Lorsque deux droites de l'espace sont perpendiculaires entre elles, leurs projections sur un plan parallèle à l'une d'elles sont aussi perpendiculaires entre elles.

THÉORÈME.

323. *Si d'un point* A *pris hors d'un plan* P (*fig.* 204), *on mène à ce plan la perpendiculaire* AB *et diverses obliques* AC, AD, AE :

1° *Deux obliques* AC *et* AD, *dont les pieds* C *et* D *s'écartent également du pied* B *de la perpendiculaire, sont égales ;*

2° *Des deux obliques* AC *et* AE, *l'oblique* AE, *qui s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire, est la plus longue.*

En effet :

1° Les deux triangles rectangles ABC et ABD étant égaux comme ayant les deux côtés de l'angle droit respectivement égaux, leurs hypoténuses AC et AD sont égales.

2° En prenant $BD = BC$, on a, en vertu de l'alinéa précédent, $AC = AD$, et par la Géométrie plane (40) $AE > AD$; donc AE est plus grand que AC.

324. Les réciproques de ces propositions sont vraies (39). Il en résulte que *le lieu des points d'un plan* P *situés à égale distance d'un point donné* A *est une circonférence ayant pour*

centre la projection B *de ce point sur le plan* (*fig.* 204). De là, un moyen pratique pour abaisser une perpendiculaire sur un plan P par un point extérieur A : on fixe au point A l'une des extrémités d'un fil dont l'autre extrémité est armée d'un crayon, on marque trois points sur le plan en tenant le fil tendu, on cherche le centre du cercle qui passerait par ces trois points (153), et l'on a le pied de la perpendiculaire demandée.

Fig. 203.

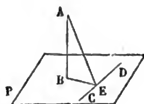


Fig. 204.

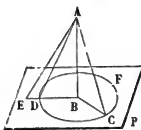
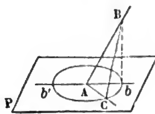


Fig. 205.



THÉORÈME.

325. *Lorsqu'une droite* AB *est oblique à un plan* P, *l'angle aigu* BAb *que cette droite fait avec sa projection sur ce plan, est moindre que l'angle* BAC *qu'elle forme avec toute autre droite* AC *passant par son pied dans le plan* (*fig.* 205).

En effet, b étant la projection d'un point quelconque B de la droite AB, prenons AC = Ab, et menons BC. Les deux triangles BAb, BAC, ont deux côtés égaux; mais le troisième côté Bb du premier étant moindre que le troisième côté BC du second, puisque la perpendiculaire est plus courte que l'oblique, il faut (32) que l'angle BAb soit moindre que l'angle BAC.

Scolie.

326. En faisant parcourir au point C le cercle décrit dans le plan P, du point A comme centre avec Ab pour rayon, on voit que l'oblique BC croît d'une manière continue depuis le point b jusqu'au point b', puis décroît en reprenant successivement les mêmes valeurs depuis b' jusqu'en b. Par suite, l'angle BAC, minimum lorsque le point C est en b, croît jusqu'à ce que le point C soit en b' : il est alors maximum; puis il décroît en reprenant successivement les mêmes valeurs depuis b' jusqu'en b.

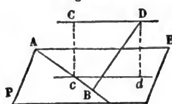
327. On appelle *angle d'une droite et d'un plan* l'angle aigu que cette droite forme avec sa projection sur ce plan.

On voit aisément que *l'angle d'une droite* D *et d'un plan* P *est égal à l'angle d'une droite quelconque* D' *parallèle à* D *et d'un plan quelconque* P' *parallèle à* P.

THÉORÈME.

328. *Étant données deux droites* AB *et* CD *non situées dans le même plan : 1° il existe une droite, et une seule, qui les rencontre l'une et l'autre à angle droit ; 2° cette perpendiculaire commune est la plus courte distance des deux droites* (*fig.* 206).

Fig. 206.



En effet :

1° Par un point quelconque A de AB, menons la parallèle AE à CD; le plan BAE, que nous désignerons par P, sera (290) parallèle à CD; par suite (316) nous aurons la projection de CD sur ce plan P en menant une parallèle *dc* à la droite DC par la projection *d* d'un point quelconque D de cette droite. Cela posé, pour qu'une droite rencontre à la fois AB et CD à angle droit, il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire au plan P en un point de AB, et qu'elle ait son pied sur *cd*, lieu des pieds des perpendiculaires au plan P menées par les divers points de CD. Or, la perpendiculaire au plan P élevée par le point *c* commun à AB et *cd* remplit seule ces conditions. Il existe donc une droite C*c*, et une seule, qui rencontre à angle droit les deux droites données AB et CD.

2° Cette perpendiculaire commune C*c* est moindre que toute autre droite BD joignant un point de AB à un point de CD. Car, D*d* étant la projetante du point D, on a évidemment $Cc = Dd$, et $Dd < DB$.

329. Souvent, dans la pratique, on n'a besoin que de la longueur de la plus courte distance; il suffit alors de mener par l'une AB des deux droites un plan P parallèle à l'autre CD, et de prendre la distance D*d* d'un point quelconque de CD au plan P.

EXERCICES.

1. Mener dans un plan donné, et par un point de ce plan, une droite perpendiculaire à une droite donnée d'une manière quelconque dans l'espace.

2. Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il suffit qu'elle soit également inclinée sur trois droites passant par son pied dans ce plan.

3. Étant donnés un plan P et deux points A et B situés d'un même côté de ce plan, trouver sur le plan P un point tel, que la somme de ses distances aux points A et B soit minimum.

4. Étant donnés un plan P et deux points A et B situés de part et d'autre de ce plan, trouver sur le plan P un point tel, que la différence de ses distances aux points A et B soit maximum.

5. Étant donnés une droite D et deux points A et B situés comme on voudra dans l'espace, trouver le point de la droite D qui est équidistant des points A et B.

6. Étant donnés un triangle ABC et un plan quelconque P, trouver le point du plan P qui est équidistant des trois sommets du triangle ABC.

7. Trouver le lieu des points d'un plan tels, que la différence des carrés de leurs distances à deux points donnés hors de ce plan soit constante.

8. Trouver le lieu des points d'un plan d'où l'on voit sous un angle droit une droite située hors de ce plan.

9. Trouver le lieu des points de l'espace dont la différence des carrés des distances à deux points donnés est constante.

10. Quel est le lieu des points dont le rapport des distances à deux plans parallèles est constant ?

11. Étant donné un angle AOB, trouver le lieu des points M de l'espace tels, que, si on les joint au sommet O de l'angle, la somme des projections de la droite OM sur les deux côtés de l'angle soit constante.

12. Le plan mené parallèlement à deux droites non situées dans un même plan, par le milieu de leur plus courte distance, passe par les milieux de toutes les droites qui joignent un point de la première droite à un point de la seconde.

13. Lorsqu'une droite est parallèle à un plan, la plus courte distance de cette droite à toutes les droites du plan qui ne lui sont pas parallèles est constante.

14. Trouver le lieu décrit par le milieu d'une droite de longueur constante, dont les extrémités s'appuient sur deux droites rectangulaires et non situées dans un même plan.

§ IV.

Programme officiel : *Angles dièdres. — Plans perpendiculaires entre eux.*

DÉFINITIONS.

330. Lorsque deux plans P et Q se rencontrent (*fig.* 207) et sont terminés à leur intersection commune BE, on dit qu'ils forment un *angle dièdre*. Les deux plans P et Q sont les *faces* et la droite BE est l'*arête* de cet angle.

Pour désigner un angle dièdre isolé, il suffit d'indiquer son arête; ainsi l'on dit (*fig.* 207) l'angle dièdre BE. Mais lorsque plusieurs angles dièdres ont la même arête, pour désigner celui d'entre eux que l'on considère, il faut employer quatre lettres, savoir : une lettre pour chaque face et deux pour l'arête; on place d'ailleurs les deux lettres relatives à l'arête entre les deux

Fig. 207.

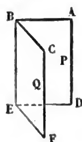
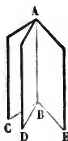


Fig. 208.



autres. Ainsi, dans la *fig.* 208, on distingue les trois dièdres CABD, DABE, CABE.

Deux angles, tels que CABD, DABE (*fig.* 208), qui ont la même arête AB, une face commune ABD, et les deux autres faces situées de part et d'autre de la face commune, sont dits *adjacents*.

331. Deux angles dièdres sont égaux lorsqu'on peut les faire coïncider. Pour ajouter deux angles dièdres, on transporte le second à la suite du premier de manière à former deux angles adjacents, tels que CABD, DABE (*fig.* 208); l'angle CABE des deux faces non communes ABC, ABE, est la somme des deux angles dièdres proposés.

332. On acquiert une idée nette de la grandeur de l'angle dièdre, en supposant que l'une des faces P d'abord appliquée

sur l'autre face Q (*fig.* 210) tourne autour de la droite AB; dans cette rotation, le plan mobile P fait avec le plan fixe Q un angle dièdre qui croît d'une manière continue.

Fig. 209.

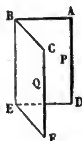


Fig. 210.

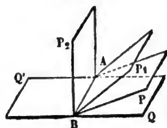
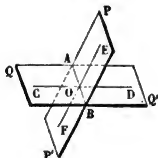


Fig. 211.



Un plan P_2 est dit *perpendiculaire* sur un plan QQ′ (*fig.* 210), lorsque les deux angles adjacents P_2ABQ, P_2ABQ', qu'il forme avec celui-ci, sont égaux. Un plan P, qui forme avec QQ′ des angles adjacents PABQ, PABQ′, inégaux, est dit *oblique* sur le plan QQ′.

On nomme *angle dièdre droit* tout dièdre P_2ABQ dont une face est perpendiculaire sur l'autre.

333. Deux angles dièdres sont dits *opposés par l'arête* lorsque les faces de l'un sont les prolongements des faces de l'autre. Deux plans indéfinis PP′, QQ′ (*fig.* 211), forment en se coupant quatre angles dièdres qui sont deux à deux opposés par l'arête AB.

On nomme *plan bissecteur* d'un angle dièdre le plan qui, mené par l'arête, divise cet angle dièdre en deux autres égaux entre eux.

334. On appelle *angle plan correspondant à un angle dièdre* l'angle rectiligne que l'on forme en élevant, par un même point de l'arête, une perpendiculaire à cette arête dans chacune des faces. Ainsi, B étant un point de l'arête BE de l'angle dièdre PEBQ (*fig.* 209), si l'on élève dans le plan P la perpendiculaire BA sur l'arête BE, et dans le plan Q la perpendiculaire BC sur l'arête BE, l'angle ABC sera l'*angle plan* du dièdre considéré.

Pour que cette définition ne soit pas contradictoire, il faut que la grandeur de l'angle plan correspondant à un angle dièdre soit la même, en quelque point de l'arête qu'on forme

cet angle plan. Or, soient les angles plans ABC, DEF, formés en deux points A et E de l'arête de l'angle dièdre PBEQ (*fig.* 209): les côtés BC et EF sont parallèles et de même sens, comme étant dans un même plan Q perpendiculaires à la même droite BE; il en est de même de BA et de ED; les angles ABC, DEF, sont donc égaux (297).

Il est à remarquer que le plan ABC est perpendiculaire a l'arête BE (321); réciproquement, tout plan perpendiculaire à l'arête coupe les faces suivant des perpendiculaires à cette arête, et par suite l'angle dièdre suivant son angle plan.

THÉORÈME.

335. *Par une droite* AB, *située dans un plan* QQ', *on peut toujours élever un plan* P, *perpendiculaire sur ce plan, et on ne peut en élever qu'un* (*fig.* 210).

COROLLAIRES.

336. *Tous les angles dièdres droits sont égaux.*

La démonstration de ce théorème et de son corollaire est tout à fait semblable à celle qui a été donnée aux nos 14 et 15 de la Géométrie plane.

Un angle dièdre est dit *aigu* ou *obtus* suivant qu'il est inférieur ou supérieur à l'angle dièdre droit. Deux angles dièdres sont *complémentaires* lorsque leur somme est égale à un angle dièdre droit.

337. *Tout plan* P *qui en rencontre un autre* QQ' *fait avec celui-ci deux angles dièdres adjacents* PABQ, PABQ', *dont la somme est égale à deux dièdres droits* (*fig.* 210). Réciproquement, *si deux angles dièdres adjacents* PABQ, PABQ', *sont supplémentaires, c'est-à-dire ont une somme égale à deux angles dièdres droits, leurs faces non communes* Q *et* Q' *sont dans le prolongement l'une de l'autre.* (*Voir* les nos 17, 18 et 19.)

338. *Lorsque deux plans* PP', QQ', *se coupent, les angles dièdres opposés par l'arête* AB *sont égaux* (*fig.* 211). (*Voir* le no 22.)

THÉORÈME.

339. *Le rapport de deux angles dièdres est égal au rapport de leurs angles plans.*

Il suffit (125) de prouver :

1° Que *si deux angles dièdres* AIOB, A'I'O'B', *sont égaux, leurs angles plans* AOB, A'O'B', *sont égaux;*

2° Que *si un angle dièdre* AIOC *est la somme de deux autres angles dièdres* A'I'O'B', BIOC, *son angle plan* AOC *est la somme des angles plans* A'O'B', BOC, *qui correspondent aux deux autres dièdres* (*fig.* 213).

En effet :

1° Transportons l'angle dièdre A'I'O'B', de manière que l'angle droit I'O'A' s'applique sur l'angle droit IOA; puisque les dièdres AIOB, A'I'O'B', sont égaux, le plan I'O'B' tombera sur le plan IOB, et O'B' coïncidera avec la perpendiculaire à IO élevée dans le plan IOB par le point O, c'est-à-dire avec OB; donc les angles plans AOB, A'O'B', sont égaux.

Fig. 212.

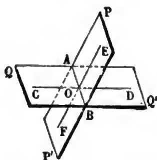
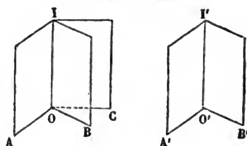


Fig. 213.



2° Puisque l'angle plan A'O'B' est égal à AOB, pour prouver que l'angle plan AOC est égal à la somme de A'O'B' et de BOC, il suffit de faire voir que les trois droites OC, OB, OA, sont dans un même plan; or cela résulte du n° 319.

Corollaire.

340. Par suite, *tout angle dièdre a la même mesure que l'angle plan correspondant, pourvu que l'on prenne pour unité d'angle dièdre le dièdre auquel correspond l'angle plan choisi pour unité d'angle plan*; ou, d'une manière incorrecte, mais plus rapide, *tout angle dièdre a pour mesure son angle plan.* (*Voir*, pour plus de détails, le n° 126.)

Scolies.

341. *L'angle dièdre droit a pour angle plan un angle droit*, et inversement, *un angle dièdre est droit si son angle plan est droit.* En effet, soient PABQ, PABQ' (*fig.* 212), deux angles

dièdres adjacents formés par la rencontre du plan P et du plan QQ'; par un point O de l'arête AB, menons un plan perpendiculaire à cette arête; ce plan déterminera, par ses intersections avec les plans P et QQ', deux angles rectilignes adjacents EOC, EOD, qui seront les angles plans des deux dièdres proposés (334). Or (340), quand les deux dièdres sont égaux, les deux angles plans sont égaux, et réciproquement.

342. La proportionnalité des angles dièdres et des angles plans correspondants permet de conclure un grand nombre de propriétés des angles dièdres, des propriétés analogues des angles rectilignes démontrées en Géométrie plane. Nous citerons par exemple les propositions suivantes, qui sont souvent utiles :

Le plan bissecteur d'un angle dièdre est le lieu des points qui, situés dans l'intérieur de cet angle, sont équidistants de ses faces; etc. (*Voir* les nos 50, 51, 52.)

Deux angles dièdres qui ont leurs faces parallèles deux à deux sont égaux ou supplémentaires. (*Voir* le no 69.)

THÉORÈME.

343. *Lorsque deux plans* P *et* Q *sont perpendiculaires l'un à l'autre, toute droite* AB, *menée dans le premier plan* P *perpendiculairement à l'intersection commune* CD, *est perpendiculaire à l'autre plan* Q (*fig.* 214).

En effet, les deux plans P et Q étant perpendiculaires l'un à l'autre, l'angle plan correspondant à l'angle dièdre PCDQ doit être droit; or on forme cet angle plan ABE en élevant, dans le

Fig. 214.

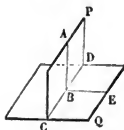


Fig. 215.

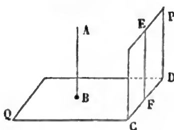
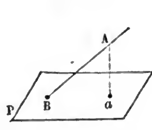


Fig. 216.



plan Q et par le point B, la perpendiculaire BE à CD; donc la droite AB est perpendiculaire à BE, et comme elle l'est aussi par hypothèse à CD, elle est perpendiculaire au plan Q.

THÉORÈME.

344. *Si une droite* AB *est perpendiculaire à un plan* Q, *tout plan* P *passant par cette droite ou parallèle à cette droite est perpendiculaire au plan* Q.

En effet :

1° Si le plan P passe par AB (*fig.* 214), menons dans le plan Q et par le point B la perpendiculaire BE à l'intersection CD des deux plans P et Q. L'angle ABE sera droit, puisque la droite AB est par hypothèse perpendiculaire au plan Q; d'ailleurs cet angle ABE est l'angle plan du dièdre PCDQ; donc ce dièdre est droit, et le plan P est perpendiculaire au plan Q.

2° Si le plan P est parallèle à AB (*fig.* 215), menons par un point quelconque E de ce plan la parallèle EF à AB; cette droite EF sera à la fois perpendiculaire au plan Q (312) et située dans le plan P (295). Donc le plan P, passant par une droite EF perpendiculaire au plan Q, sera perpendiculaire à ce plan (1°).

345. Réciproquement, *si deux plans* Q *et* P *sont perpendiculaires entre eux, toute droite* AB *perpendiculaire au premier plan* Q *est située dans l'autre plan* P *ou lui est parallèle.*

En effet, si la droite AB n'avait qu'un seul point commun avec le plan P, en menant de ce point une perpendiculaire sur l'intersection CD des plans P et Q (*fig.* 215), cette perpendiculaire serait perpendiculaire au plan Q (343), et l'on pourrait mener d'un même point deux perpendiculaires au plan Q; ce qui est impossible (313). La droite AB, ne pouvant couper le plan P, est donc parallèle à ce plan ou située dans ce plan.

Corollaire.

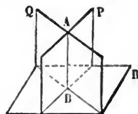
346. *Par une droite* AB *oblique à un plan* P (*fig.* 216), *on peut abaisser un plan perpendiculaire sur ce plan* P, *et on ne peut en abaisser qu'un.*

En effet, le plan BAa, déterminé par la droite AB et par la perpendiculaire Aa au plan P abaissée d'un point quelconque de AB, est perpendiculaire (344) au plan P. C'est le seul, car tout plan conduit par AB perpendiculairement au plan P doit (345) contenir la perpendiculaire Aa.

THÉORÈME.

347. *Si deux plans* P *et* Q *sont perpendiculaires à un troisième* R, *leur intersection* AB *est perpendiculaire à ce troisième plan* (*fig.* 217).

Fig. 217.



Car si, par un point quelconque de l'intersection AB, on mène la perpendiculaire au plan R, cette perpendiculaire doit se trouver à la fois dans le plan P et dans le plan Q (345); elle ne diffère donc pas de AB.

COROLLAIRES.

348. Un plan perpendiculaire à deux plans qui se coupent est perpendiculaire à leur intersection.

349. Si les plans P et Q de la *fig.* 217 forment un angle dièdre droit, les trois plans P, Q, R, seront perpendiculaires entre eux; l'intersection de deux quelconques de ces plans sera perpendiculaire au troisième (347), et les trois intersections seront perpendiculaires entre elles.

EXERCICES.

1. Si, par un point O de l'espace, on mène deux parallèles OA et OB à un plan donné P, puis par le même point O deux plans respectivement perpendiculaires à OA et à OB, l'intersection de ces plans est perpendiculaire au plan P (cette proposition est utile dans les applications).

2. Si l'on projette un même point de l'espace sur deux plans qui se coupent, les perpendiculaires abaissées des deux projections sur l'intersection des deux plans la rencontrent au même point.— Réciproquement, si cette condition est remplie pour deux points des deux plans, ces points sont les projections d'un même point de l'espace.

3. Toute ligne qui se projette sur deux plans qui se coupent suivant une ligne droite est elle-même une ligne droite.

4. Quel est le lieu des points de l'espace équidistants de deux droites qui se coupent?

5. Les perpendiculaires abaissées d'un même point sur des plans dont les intersections sont parallèles, sont dans un seul et même plan.

§ V.

Programme officiel : *Notions sur les angles trièdres et polyèdres*

DÉFINITIONS

350. Lorsque plusieurs plans ASB, BSC, CSD,... (*fig.* 218) se coupent successivement suivant des droites SB, SC, SD,... qui concourent en un même point S, on dit qu'ils forment *un angle polyèdre*. Le point S est le *sommet*, les droites SA, SB, SC,... sont les *arêtes*, et les angles ASB, BSC, CSD,... sont les *faces* de l'angle polyèdre.

On désigne un angle polyèdre par la lettre du sommet suivie des lettres relatives aux diverses arêtes. Ainsi, pour indiquer l'angle polyèdre de la *fig.* 218, on dira l'angle SABCDE, ou plus simplement l'angle S, car quand un angle polyèdre est isolé, la lettre du sommet suffit.

Fig. 218.

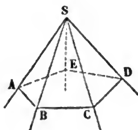


Fig. 219.

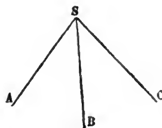
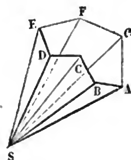


Fig. 220.



Il faut au moins trois plans pour former un angle polyèdre. L'angle formé par trois plans prend le nom d'*angle trièdre*. Dans un angle trièdre SABC (*fig.* 219), on distingue six éléments, savoir : les trois faces ASB, BSC, CSA, et les trois dièdres SA, SB, SC.

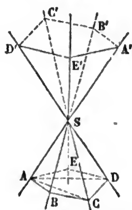
351. On dit qu'un angle polyèdre est *convexe*, lorsqu'il est situé tout entier d'un même côté par rapport au plan indéfini de chacune de ses faces (*fig.* 218); il est *concave* dans le cas contraire (*fig.* 220). Tout angle trièdre est convexe.

352. Si l'on prolonge au delà du sommet S toutes les arêtes d'un angle polyèdre SABCDE (*fig.* 221), on obtient un autre

angle polyèdre SA'B'C'D'E' qui est dit le symétrique du premier.

Deux angles polyèdres symétriques SABCDE, SA'B'C'D'E', ont tous leurs éléments respectivement égaux : les faces ASB

Fig. 221.



et A'SB', BSC et B'SC',... sont égales deux à deux comme angles plans opposés par le sommet, et les angles dièdres SA et SA', SB et SB',..., sont égaux comme opposés par l'arête. Mais la disposition des parties égales n'est pas la même dans les deux angles polyèdres. En effet, un observateur couché sur l'arête SA, ayant la tête en S, les pieds en A, et regardant l'intérieur de l'angle SABCDE, verrait les arêtes se présenter de droite à gauche dans l'ordre SB, SC, SD, SE; tandis qu'un observateur placé de la même manière dans l'autre angle SA'B'C'D'E', c'est-à-dire couché sur SA', ayant la tête en S, les pieds en A' et regardant l'intérieur de l'angle, verrait les arêtes se succéder de droite à gauche dans l'ordre inverse SE', SD', SC', SB'.

A cause de cette différence de disposition, *deux angles polyèdres symétriques, bien qu'égaux dans toutes leurs parties, ne sont pas superposables.*

THÉORÈME.

353. *Dans tout angle polyèdre, une face quelconque est moindre que la somme de toutes les autres.*

Il n'y a lieu à démontrer cette proposition que lorsque la face considérée est plus grande que chacune des autres.

Cela posé, considérons d'abord un angle trièdre SABC (*fig.* 222). Dans la face ASB que nous supposons plus grande que chacune des deux autres, formons un angle ASD égal à

ASC, et prenons, à partir de S, sur les droites SD et SC, des longueurs SD et SC égales entre elles. Par le point D, menons une droite ADB qui rencontre les arêtes SA et SB en A et B; enfin, joignons le point C aux points A et B. L'égalité des deux triangles ASD, ASC, qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, donne $AD = AC$; et comme on a

$$AB \text{ ou } AD + DB < AC + CB,$$

on voit que le segment DB est moindre que CB. Dès lors, les deux triangles CSB, DSB, ayant SB commun, $SC = SD$, et $DB < CB$, il faut (32) que l'angle DSB soit moindre que CSB. Donc, en ajoutant d'une part l'angle ASD et de l'autre son égal ASC, on a

$$ASD + DSB \text{ ou } ASB < ASC + CSB.$$

Pour étendre le théorème au cas d'un angle polyèdre quelconque, il suffit de décomposer cet angle en trièdres en menant par l'une des arêtes SA et par les arêtes opposées SC, SD, des plans diagonaux ASC, ASD (*fig.* 221); la démonstration est évidente.

Fig. 222.

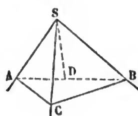
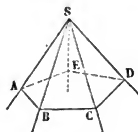


Fig. 223.



THÉORÈME.

354. *Dans tout angle polyèdre convexe, la somme des faces est moindre que quatre angles droits* (*fig.* 223).

En effet, soit ABCDE un polygone *convexe* obtenu en coupant l'angle polyèdre par un plan qui rencontre toutes les arêtes. En ajoutant les inégalités

$$EAB < EAS + BAS,$$
$$ABC < ABS + CBS,$$
$$BCD < BCS + DCS,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

que fournissent les trièdres A, B, C,... (353), on voit que la somme des angles intérieurs du polygone ABCDE est moindre que la somme des angles à la base des triangles SAB, SBC, SCD,..., qui ont S pour sommet. Or, la somme des angles tant intérieurs qu'extérieurs du polygone convexe ABCDE est égale à la somme de tous les angles des triangles dont S est le sommet commun. Donc, la somme des angles en S de ces triangles, c'est-à-dire la somme des faces de l'angle polyèdre, est moindre que la somme des angles extérieurs du polygone, c'est-à-dire (81) moindre que quatre angles droits.

EXERCICES.

1. Dans tout angle trièdre, les plans bissecteurs des angles dièdres se coupent suivant une même droite. — Quel est le lieu des points équidistants des trois faces d'un angle trièdre indéfiniment prolongées?

2. Dans tout angle trièdre, les plans menés perpendiculairement aux faces, par les bissectrices de ces faces, se coupent suivant une même droite. — Quel est le lieu géométrique des points équidistants des trois arêtes d'un angle trièdre indéfiniment prolongées?

3. Dans tout angle trièdre, les plans menés par les arêtes perpendiculairement aux faces opposées se coupent suivant une même droite.

4. Dans tout angle trièdre, les plans menés par les arêtes et les bissectrices des faces opposées se coupent suivant une même droite.

QUESTIONS PROPOSÉES

SUR LE CINQUIÈME LIVRE.

1. Si une droite est également inclinée sur les deux faces d'un angle dièdre, ses traces sur les deux faces sont également distantes de l'arête de l'angle dièdre. — Réciproque.

2. Quel est le lieu des points équidistants de deux plans qui se coupent?

3. Quel est le lieu des points équidistants de deux plans donnés et de deux points ou de deux droites données situées dans un même plan?

4. Montrer que si, par un même point de l'arête d'un angle dièdre, on mène dans chaque face une droite faisant un angle donné α avec cette arête, l'angle rectiligne ainsi obtenu ne varie pas proportionnellement à l'angle dièdre, à moins que l'angle α ne soit droit.

5. Si par l'une des diagonales d'un parallélogramme on mène un plan quelconque, les perpendiculaires, abaissées sur ce plan des extrémités de l'autre diagonale, sont égales.

6. Un angle AOB tourne dans l'espace autour d'une droite ZZ' parallèle à sa bissectrice; démontrer que, si A'O'B' est une seconde position d'ailleurs quelconque de cet angle : 1° les droites OA et O'A' ne sont pas dans un même plan, non plus que les droites OB et O'B'; 2° OA et O'B' sont dans un même plan, et il en est de même de O'A' et de OB; 3° trois quelconques des droites OA, OB, O'A', O'B', ne sont pas parallèles à un même plan.

7. Soient une droite quelconque AB et un plan P. Si AB est divisée au point C dans le rapport $\frac{m}{n}$, et si des points A, B, C, on abaisse sur le plan P les perpendiculaires AA', BB', CC', on a

$$(m+n)\,CC' = n.AA' + m.BB'.$$

8. Si la somme des perpendiculaires abaissées d'un point A sur deux plans donnés est égale à la somme des perpendiculaires abaissées d'un autre point B sur les mêmes plans, cette somme reste la même pour tout autre point C de la droite AB.— Étendre ce théorème au cas d'un nombre quelconque de plans.

9. Soient trois points A, B, C, et deux plans P et Q. Si la somme des deux perpendiculaires abaissées de chacun de ces points sur les deux plans est la même pour les trois points, cette somme restera encore la même pour tout autre point du plan ABC. — Étendre ce théorème au cas d'un nombre quelconque de plans.

10. Quel est le lieu des points tels, que la somme de leurs distances à deux plans donnés soit égale à une droite donnée.

11. Quel est le lieu des points tels, que la somme de leurs distances à trois plans donnés soit égale à une droite donnée? — Étendre ce problème au cas d'un nombre quelconque de plans.

12. Trouver sur une droite donnée un point tel, que la somme de ses distances à deux plans qui se coupent soit un minimum.

13. Couper un angle polyèdre à quatre faces, de manière que la section soit un parallélogramme.

14. Si, dans le plan de chaque face d'un angle trièdre et par son sommet on mène une perpendiculaire à l'arête opposée, les trois perpendiculaires obtenues sont dans un même plan.

15. Tout plan perpendiculaire à l'une des arêtes d'un angle trièdre rectangle coupe cet angle trièdre suivant un triangle rectangle.

16. A, B, C, étant trois points pris à volonté sur les arêtes d'un angle trièdre tri-rectangle et O la projection du sommet S de cet angle trièdre sur le plan ABC, démontrer que le triangle ASB est moyen proportionnel entre les triangles ABC et OAB.

17. Étant donné le triangle suivant lequel la feuille de dessin est rencontrée par un angle trièdre tri-rectangle, trouver, par des constructions graphiques exécutées sur le plan de cette feuille, les inclinaisons des trois arêtes de l'angle trièdre sur ce plan.

18. Couper un angle trièdre tri-rectangle par un plan tel, que la section soit un triangle égal à un triangle donné.



LIVRE VI.

LES POLYÈDRES.

§ I.

PROGRAMME OFFICIEL : *Sections planes du prisme.*

DÉFINITIONS.

355. On appelle *polyèdre* tout corps terminé de toutes parts par des plans.

Ces plans, en se limitant mutuellement, déterminent les *arêtes*, les *faces* et les *sommets* du polyèdre. Les angles dièdres et polyèdres formés par les faces sont les angles dièdres et polyèdres de la figure. Le polyèdre a pour *diagonales* les droites qui unissent deux sommets quelconques non situés sur une même face.

On a donné des noms particuliers à certains polyèdres d'après le nombre de leurs faces. Ainsi, tout polyèdre ayant quatre faces est un *tétraèdre*. Les noms *hexaèdre, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre*, correspondent aux polyèdres de six, huit, douze, vingt faces.

356. Un polyèdre est *convexe*, lorsqu'il reste tout entier d'un même côté de chacune de ses faces prolongées indéfiniment.

Une droite quelconque ne peut rencontrer la surface d'un polyèdre convexe en plus de deux points. Car tout plan mené suivant cette droite rencontre nécessairement la surface du polyèdre suivant un polygone convexe (72), dont le contour a, avec la droite donnée, les mêmes points d'intersection que la surface du polyèdre.

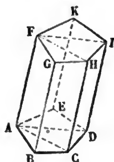
Dans ce qui suit, il ne s'agira que de polyèdres convexes.

357. Parmi les polyèdres, on distingue le *prisme* et la *pyramide*.

Le *prisme* est un polyèdre compris sous plusieurs plans parallélogrammes réunis entre eux par deux faces opposées égales et parallèles.

On construit un prisme de la manière suivante :

Fig. 224.



Soit (*fig.* 224) ABCDE un polygone plan quelconque. Par le sommet A, menons extérieurement au plan de ce polygone la droite AF et, par le point F, un plan parallèle au plan ABCDE; puis, par les sommets B, C, D, E, traçons jusqu'à la rencontre du plan mené par le point F les droites BG, CH, DI, EK, parallèles à AF. Ces droites sont toutes égales à AF (306); toutes les faces ABGF, BCHG, CDIH, etc., sont donc des parallélogrammes. De plus, les deux polygones parallèles ABCDE, FGHIK, sont égaux comme ayant leurs côtés égaux et parallèles. Le polyèdre obtenu est donc un prisme.

358. Si la droite AF est perpendiculaire au plan ABCDE, le prisme est *droit;* sinon, il est *oblique*.

Les droites AF, BG, CH, etc., sont les *arêtes latérales* du prisme, et la somme des faces parallélogrammes ABGF, BCHG, etc., forme son aire latérale.

Le prisme a pour *bases* les deux polygones égaux et parallèles ABCDE, FGHIK, et sa *hauteur* est la distance des plans de ses deux bases.

359. Dans un prisme droit, chaque arête latérale est égale à la hauteur. Les faces latérales d'un prisme droit sont des rectangles.

Dans un prisme oblique, la hauteur est moindre que l'arête latérale.

Un prisme *régulier* est un prisme droit qui a pour bases des polygones réguliers.

360. Suivant que les bases d'un prisme sont des triangles, des quadrilatères, des pentagones, des hexagones, etc., le prisme est dit *triangulaire, quadrangulaire, pentagonal, hexagonal, etc.*

361. Parmi les prismes quadrangulaires, on distingue celui qui a pour bases des parallélogrammes, et on lui donne le nom de *parallélipipède*. Toutes les faces d'un parallélipipède sont des parallélogrammes (*fig.* 225).

Un parallélipipède peut être *droit* ou *oblique* (358).

Parmi les parallélipipèdes droits, on distingue le *parallélipipède rectangle,* dont les bases sont des rectangles. Toutes les faces d'un parallélipipède rectangle sont des rectangles (*fig.* 226).

On nomme *cube* le parallélipipède rectangle dont les bases et les faces latérales sont des carrés, nécessairement égaux (*fig.* 227).

On remarquera que la perspective déformant les angles, la *fig.* 226 représente aussi bien un parallélipipède droit qu'un parallélipipède rectangle.

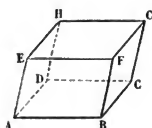


Fig. 225.

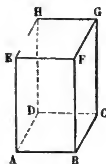


Fig. 226.

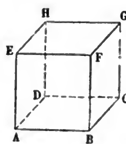


Fig. 227.

362. De même qu'on appelle dimensions d'un rectangle les longueurs de deux côtés adjacents, on appelle *dimensions* d'un parallélipipède rectangle les longueurs de trois arêtes contiguës, c'est-à-dire partant d'un même sommet. Le parallélipipède rectangle (*fig.* 226) a pour dimensions les longueurs des arêtes AB, AD, AE.

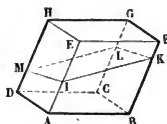
THÉORÈME.

363. *Les faces opposées d'un parallélipipède sont égales et parallèles.*

Soit (*fig.* 228) le parallélipipède AG. Ses bases ABCD, EFGH, sont, par définition, des parallélogrammes égaux et parallèles.

Il faut donc prouver seulement que deux faces latérales opposées, ADHE et BCGF par exemple, remplissent la même condition. Or, AD et BC sont égaux et parallèles comme côtés

Fig. 228.



opposés du parallélogramme ABCD; AE et BF sont aussi égaux et parallèles comme côtés opposés du parallélogramme ABFE. Par suite (297), les deux angles DAE et CBF sont égaux et leurs plans sont parallèles. Les deux parallélogrammes ADHE, BCGF, sont donc égaux et parallèles.

Corollaires.

364. Le parallélipipède étant un prisme compris sous six faces parallélogrammes dont les opposées sont égales et parallèles, *on peut prendre pour bases d'un parallélipipède deux faces opposées quelconques* (357).

365. *Tout plan qui rencontre deux faces opposées d'un parallélipipède le coupe suivant un parallélogramme.* Soit le plan IKLM (*fig.* 228) qui rencontre les deux faces opposées ADHE et BCGF du parallélipipède AG. Les côtés opposés de la section IKLM étant parallèles comme intersections de deux plans parallèles coupés par un troisième, cette section est un parallélogramme.

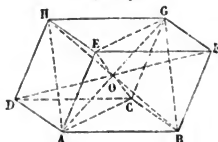
Scolie.

366. Pour construire un parallélipipède sur trois droites données AB, AD, AE, partant d'un même point A et non situées dans un même plan (*fig.* 228), il suffit de mener par l'extrémité non commune de chacune de ces droites un plan parallèle au plan des deux autres. Ainsi, par le point E, on conduira un plan parallèle au plan BAD, par le point D un plan parallèle au plan BAE, par le point B un plan parallèle au plan DAE. Le polyèdre compris sous les six plans considérés sera un parallélipipède.

THÉORÈME.

367. *Dans un parallélipipède, les quatre diagonales se coupent mutuellement en parties égales.*

Fig. 229.



Soient (*fig.* 229) le parallélipipède AG et ses quatre diagonales AG, CE, BH, DF. Les deux côtés AE et CG étant égaux et parallèles, la figure ACGE est un parallélogramme dont les diagonales AG et CE se coupent mutuellement au point O en parties égales. La figure ABGH étant aussi un parallélogramme, les diagonales AG et BH se coupent mutuellement en parties égales, c'est-à-dire au point O milieu de AG. On prouverait de même que la quatrième diagonale DF passe au point O et y est divisée en parties égales.

Scolies.

368. Si le parallélipipède proposé est rectangle, tous les parallélogrammes de la figure deviennent des rectangles. Le parallélogramme ABGH, par exemple, est alors un rectangle, parce que l'arête AB est perpendiculaire à la face ADHE. Les diagonales d'un rectangle étant égales, *les quatre diagonales d'un parallélipipède rectangle sont égales.*

369. Dans l'hypothèse précédente, les triangles HAB, HDA, étant rectangles, on a

$$\overline{BH}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AH}^2, \quad \overline{AH}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DH}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2.$$

Par suite,

$$\overline{BH}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2.$$

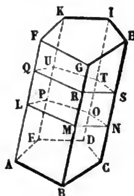
Donc, *le carré de la diagonale d'un parallélipipède rectangle est égal à la somme des carrés de ses trois dimensions.*

Un cube étant un parallélipipède rectangle dont les dimensions sont égales, *le carré de la diagonale d'un cube est égal à trois fois le carré de son arête.*

THÉORÈME.

370. *Les sections faites dans un prisme par deux plans parallèles sont deux polygones égaux.*

Fig. 230.



Soient (*fig.* 230) le prisme AH et les sections LMNOP, QRSTU, faites par deux plans parallèles. Les côtés de ces sections sont deux à deux parallèles comme intersections de deux plans parallèles coupés par un troisième, et égaux comme parallèles comprises entre parallèles. Les deux polygones obtenus ont donc à la fois leurs angles égaux (297) et leurs côtés égaux.

COROLLAIRES.

371. Lorsque le plan sécant est parallèle à la base du prisme, la section obtenue est égale à cette base.

En supposant les arêtes latérales du prisme prolongées au delà des bases, la démonstration précédente s'applique, que les sections soient intérieures ou extérieures au prisme, et même lorsqu'elles sont en partie intérieures et en partie extérieures. Il suffit que les plans sécants rencontrent toutes les arêtes latérales.

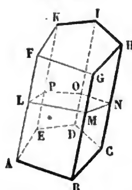
SCOLIE.

372. On appelle *section droite* d'un prisme la section déterminée dans ce prisme par un plan perpendiculaire à ses arêtes latérales.

THÉORÈME.

373. *L'aire latérale d'un prisme a pour mesure le produit du périmètre de sa section droite par son arête latérale.*

Fig. 231.



Soient (*fig.* 231) le prisme AH et sa section droite LMNOP. Les côtés de cette section droite sont les hauteurs des parallélogrammes qui forment l'aire latérale du prisme, et ces parallélogrammes ont pour bases égales les arêtes latérales du polyèdre. La somme de leurs mesures sera donc

$$\begin{gathered}AF.LM + BG.MN + \ldots + KE.PL \\ = AF.(LM + MN + \ldots + PL).\end{gathered}$$

Corollaires.

374. Si le prisme est droit, sa section droite est égale à sa base et son arête latérale à sa hauteur (359, 371). *L'aire latérale d'un prisme droit a* donc *pour mesure le produit du périmètre de sa base par sa hauteur.*

En ajoutant à l'aire latérale d'un prisme deux fois l'aire de sa base, on obtient son aire totale.

EXERCICES.

1. Toute droite limitée à la surface d'un parallélipipède, et passant par le point d'intersection de ses diagonales (ou par le *centre* de ce parallélipipède), est divisée en ce point en deux parties égales.

2. On donne trois droites deux à deux non situées dans un même plan, et l'on demande de construire un parallélipipède dont trois arêtes soient sur ces trois droites.

3. Dans tout prisme quadrangulaire, la somme des carrés des arêtes surpasse la somme des carrés des diagonales de huit fois le carré de la droite qui joint les milieux communs de ces diagonales considérées deux à deux. — Application au parallélipipède quelconque.

§ II.

Programme officiel : *Volume du prisme.*

DÉFINITIONS.

375. On appelle *volume* d'un polyèdre l'étendue du lieu qu'il occupe dans l'espace indéfini.

Quand deux polyèdres peuvent coïncider, ils sont *égaux*. Quand deux polyèdres ont des volumes égaux sans pouvoir coïncider, on dit qu'ils sont *équivalents*.

Pour démontrer que deux polyèdres convexes coïncident, il suffit de prouver qu'ils ont les mêmes sommets.

376. Si l'on détache une portion d'un prisme par un plan incliné à sa base, le polyèdre restant est un *prisme tronqué*. La section obtenue est la base supérieure du tronc de prisme.

THÉORÈME.

377. *Deux prismes droits de même base et de même hauteur sont égaux.*

Car, si l'on fait coïncider les bases inférieures de ces prismes, leurs arêtes latérales prendront deux à deux la même direction (313), et comme elles sont égales à la hauteur donnée, les bases supérieures des deux prismes coïncideront aussi.

Scolie.

378. La démonstration précédente s'applique au cas de deux prismes droits tronqués de même base, lorsque leurs arêtes latérales sont égales deux à deux.

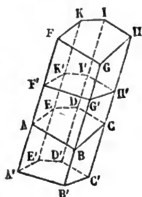
THÉORÈME.

379. *Tout prisme oblique est équivalent au prisme droit ayant pour base la section droite du prisme oblique et pour hauteur son arête latérale.*

Soit (*fig.* 232) le prisme oblique ABCDEFGHIK ou AH. Par un point G' de l'arête BG, menons la section droite F'G'H'I'K'. Prolongeons l'arête BG au-dessous de la base ABCDE d'une longueur BB' = GG', et par le point B' menons un plan paral-

lèle au plan de la section droite. Les intersections de ce plan avec les arêtes latérales du prisme prolongées, détermineront un polygone A′B′C′D′E′ égal (371) au polygone F′G′H′I′K′. La figure A′B′C′D′E′F′G′H′I′K′ ou A′H′ sera donc un prisme

Fig. 232.



droit ayant pour base la section droite du prisme oblique AH, et pour hauteur son arête latérale BG; car on a B′G′ = BG, puisque, par construction, BB′ = GG′.

Ceci posé, le volume compris entre la base inférieure du prisme oblique AH et la base supérieure du prisme droit A′H′ est commun aux deux prismes. Pour démontrer l'équivalence de ces deux prismes, il suffit donc de démontrer l'égalité des deux polyèdres ou prismes droits tronqués (376) A′B′C′D′E′ABCDE ou A′C et F′G′H′I′K′FGHIK ou F′H. Cette égalité résulte immédiatement de la remarque faite au n° 378; car les deux bases A′B′C′D′E′, F′G′H′I′K′, sont égales, ainsi que les arêtes correspondantes A′A et F′F, B′B et G′G, etc. A′A, par exemple, est l'arête latérale ou la hauteur du prisme droit A′H′, diminuée de AF′, et F′F est l'arête latérale du prisme oblique AH, diminuée de la même quantité.

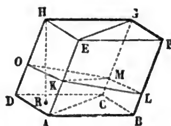
THÉORÈME.

380. *Le plan mené par deux arêtes latérales opposées d'un parallélipipède le partage en deux prismes triangulaires équivalents.*

Soit (*fig.* 233) le parallélipipède quelconque AG. Le plan AEGC, mené par les arêtes opposées AE et CG, partage ce parallélipipède en deux prismes triangulaires ABCEFG, ACDEGH, dont il s'agit de démontrer l'équivalence.

Menons la section droite du parallélipipède AG. Cette section OKLM est un parallélogramme (365); et les deux triangles égaux KLM, KMO, suivant lesquels la diagonale KM la divise, sont respectivement les sections droites des prismes ABCEFG, ACDEGH.

Fig. 233.



Or, le prisme triangulaire ABCEFG est équivalent au prisme droit ayant pour base KLM et pour hauteur AE (379); de même, le prisme triangulaire ACDEGH est équivalent au prisme droit ayant pour base KMO et pour hauteur AE. Les deux prismes droits énoncés étant égaux (377), les deux prismes triangulaires ABCEFG, ACDEGH, sont équivalents, et chacun d'eux est la moitié du parallélipipède AG.

THÉORÈME.

381. *Le rapport de deux parallélipipèdes rectangles de même base est égal au rapport de leurs hauteurs;* en d'autres termes, *le volume d'un parallélipipède rectangle de base constante est proportionnel à sa hauteur.*

Il suffit (125) de prouver :

1° Que, *si deux parallélipipèdes rectangles de même base ont des hauteurs égales, ils sont égaux;*

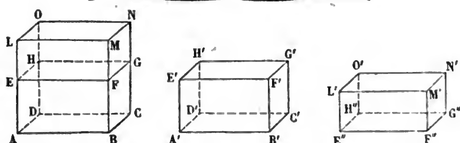
2° Que, *si trois parallélipipèdes rectangles de même base sont tels, que la hauteur du premier soit égale à la somme des hauteurs des deux autres, le premier parallélipipède est égal à la somme des deux autres.*

En effet :

1° Soient (*fig.* 234) les deux parallélipipèdes rectangles AG et A'G', dont les bases ABCD, A'B'C'D', sont égales ainsi que les hauteurs AE et A'E'; ces deux parallélipipèdes rectangles seront égaux comme prismes droits ayant même base et même hauteur (377).

2° Soient (*fig.* 234) les trois parallélipipèdes rectangles AN, A′G′, E″N′, dont les bases ABCD, A′B′C′D′, E″F″G″H″, sont

Fig. 234.



égales, et dont les hauteurs AL, A′E′, E″L′, satisfont à la condition

$$AL = A'E' + E''L';$$

le parallélipipède rectangle AN est égal à la somme des deux autres. Car, si l'on prend sur AL une longueur AE égale à A′E′, et qu'on mène par le point E une section EFGH parallèle à la base ABCD, EL sera égale à E″L′, en vertu de l'hypothèse énoncée. Par suite, des deux parallélipipèdes rectangles AG, EN, qui composent le parallélipipède rectangle AN, le premier sera égal au parallélipipède rectangle A′G′, et le second au parallélipipède rectangle E″N′ (1°).

Corollaires.

382. Dire que deux parallélipipèdes rectangles ont même base, c'est dire qu'ils ont deux dimensions communes (362). Le précédent théorème peut donc être énoncé de cette manière :

Deux parallélipipèdes rectangles qui ont deux dimensions communes sont entre eux comme leurs troisièmes dimensions.

Il résulte de là et du théorème général du n° 245 que *deux parallélipipèdes rectangles quelconques sont entre eux comme les produits de leurs trois dimensions.*

383. L'une des dimensions d'un parallélipipède rectangle étant prise pour sa hauteur, le produit des deux autres dimensions mesure sa base (249). Donc, *deux parallélipipèdes rectangles quelconques sont entre eux comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur.*

THÉORÈME.

384. *Le volume d'un parallélipipède rectangle a pour mesure le produit du nombre qui mesure sa base par le nombre qui mesure sa hauteur, lorsqu'on prend pour unités d'aire et de volume le carré et le cube construits sur l'unité de longueur.*

En effet, soient (*fig.* 234) AN le parallélipipède rectangle à mesurer et A'G' le cube dont le côté $A'B' = A'D' = A'E'$ représente l'unité de longueur : on a (383)

$$\frac{AN}{A'G'} = \frac{ABCD}{A'B'C'D'} \times \frac{AL}{A'E'}.$$

Or, dans le système d'unités adopté, le premier membre de cette relation est égal au nombre qui mesure le volume AN, et les rapports qui composent le second membre sont respectivement égaux aux nombres qui mesurent la base et la hauteur du parallélipipède rectangle proposé (119). Donc le nombre qui mesure le volume du parallélipipède rectangle est égal au produit des nombres qui mesurent sa base et sa hauteur. Ainsi, en désignant ces trois nombres par V, B, H, on a la formule

$$V = B.H.$$

On préfère énoncer ce théorème usuel d'une manière plus rapide, quoique incorrecte, en disant : *le volume d'un parallélipipède rectangle est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

SCOLIES.

385. En se reportant au n° 382, le rapport du parallélipipède rectangle AN au cube A'G' peut s'écrire

$$\frac{AN}{A'G'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AD}{A'D'} \cdot \frac{AE}{A'E'}.$$

Les rapports qui composent le second membre étant respectivement égaux aux nombres qui mesurent les arêtes contiguës du parallélipipède rectangle, on voit que le nombre qui mesure le volume d'un parallélipipède rectangle est égal au produit des nombres qui mesurent ses trois dimensions. En

d'autres termes, *le volume d'un parallélipipède rectangle est égal au produit de ses trois dimensions.*

Ce second énoncé n'est applicable qu'au parallélipipède rectangle; nous allons prouver en terminant ce paragraphe que le premier (384), où entrent explicitement la base et la hauteur du parallélipipède, est applicable à tous les prismes.

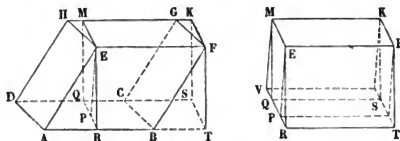
386. Le volume d'un cube est égal à la troisième puissance de son arête. De là, le nom de *cube* donné à la troisième puissance d'un nombre.

THÉORÈME.

387. *Le volume d'un parallélipipède quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Soit (*fig.* 235) le parallélipipède quelconque AG ayant pour base ABCD ou EFGH, et pour hauteur la perpendiculaire EP abaissée du sommet E sur le plan ABCD. Menons par le point E, dans le plan EFGH, la perpendiculaire EM à HG. Si l'on prend la face AEHD pour base du parallélipipède pro-

Fig. 235.



posé (364), son arête latérale sera EF, et sa section droite sera le parallélogramme EMQR déterminé par le plan MEP. Le parallélipipède AG sera donc équivalent au parallélipipède droit RK ayant pour base la section droite EMQR et pour hauteur l'arête EF (379).

Ceci posé, reproduisons à part, pour plus de clarté (*fig.* 235), ce parallélipipède droit RK, et construisons un parallélipipède rectangle PK ayant pour dimensions EF, EM, EP. Le parallélipipède droit RK et le parallélipipède rectangle PK ainsi déterminé, présentent seulement comme parties non communes les deux prismes droits qui ont pour hauteur EF et pour bases les deux triangles égaux EPR, MVQ. Ces deux prismes droits étant égaux (377), les deux parallélipipèdes seront équi-

valents et, par suite, il en sera de même du parallélipipède quelconque AG et du parallélipipède rectangle PK. Donc, le produit EF.EM.EP, qui exprime la mesure (385) du parallélipipède rectangle PK, mesure aussi le volume du parallélipipède quelconque AG. Or, EF.EM mesure la base EFGH de ce parallélipipède, et EP est sa hauteur.

Donc enfin, le volume du parallélipipède quelconque AG est égal au produit de sa base par sa hauteur.

THÉORÈME.

388. *Le volume d'un prisme quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Fig. 236.

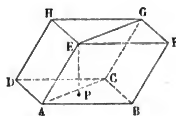
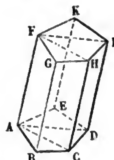


Fig. 237.



1° Soit (*fig.* 236) le prisme triangulaire ABCEFG. Par l'extrémité A de l'arête AB, menons le plan ADHE parallèle à la face BCGF, et par l'extrémité C de l'arête BC le plan CDHG parallèle à la face ABFE; prolongeons en même temps les deux bases du prisme jusqu'à la rencontre de ces plans. On obtiendra ainsi (366) le parallélipipède AG construit sur les trois droites AB, BC, BF. La face ACGE du prisme triangulaire considéré étant un plan diagonal du parallélipipède AG, ce prisme en sera la moitié (380). Donc, le volume du parallélipipède AG ayant pour mesure le produit de sa base ABCD par sa hauteur EP (387), le volume du prisme triangulaire ABCEFG aura pour mesure la moitié de ce produit, c'est-à-dire le produit de sa base ABC, moitié du parallélogramme ABCD, par sa hauteur EP.

2° Soit (*fig.* 237) un prisme quelconque ABCDEFGHIK. On le décompose en prismes triangulaires en faisant passer des plans diagonaux par l'arête AF et chacune des arêtes CH, DI. Ces prismes triangulaires ont pour bases les triangles ABC,

ACD, ADE, qui composent la base du prisme donné, et leur hauteur commune est celle H du prisme. La somme de leurs mesures (1°)

$$ABC.H + ACD.H + ADE.H,$$

ou la mesure du prisme AI, sera donc égale au produit de sa base ABCDE par sa hauteur H.

COROLLAIRES.

389. En désignant par V, B, H, les trois nombres qui mesurent respectivement le volume d'un prisme, sa base et sa hauteur, on a la formule générale

$$V = B.H.$$

Donc, *deux prismes de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalents; deux prismes sont entre eux comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur; deux prismes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs; deux prismes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

EXERCICES.

1. Un bassin a la forme d'un prisme hexagonal régulier de $0^m,75$ de hauteur, le côté de la base hexagonale est égal à 1 mètre; calculer la capacité du bassin.

2. Le volume d'un prisme triangulaire a pour mesure la moitié du produit de l'aire d'une face latérale par la distance de cette face à l'arête opposée.

3. Si sur trois droites parallèles et non situées dans un même plan, on prend d'une manière quelconque des longueurs égales à une droite donnée, le volume du prisme triangulaire ainsi formé est constant.

4. Deux prismes sont égaux : 1° lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre une base et une face égales chacune à chacune et semblablement disposées; 2° lorsqu'ils ont une base et deux faces adjacentes égales chacune à chacune et semblablement disposées.

5. Deux prismes triangulaires sont égaux, lorsqu'ils ont leurs faces latérales égales chacune à chacune et semblablement disposées.

6. Vérifier par la Géométrie la formule qui donne le cube d'une somme ou d'une différence de deux parties.

7. Mener par une droite donnée un plan qni partage un parallélipipède en deux parties équivalentes.

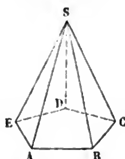
§ III.

Programme officiel : *Sections planes de la pyramide.*

DÉFINITIONS.

390. La *pyramide* est un polyèdre dont l'une des faces est un polygone quelconque, et dont toutes les autres faces sont des triangles ayant pour bases respectives les différents côtés de la face polygonale, et pour sommet commun un point extérieur à cette face.

Fig. 238.



Ainsi, soient (*fig.* 238) un polygone ABCDE et un point S pris hors du plan de ce polygone. Le corps limité par la face polygonale ABCDE et par les faces triangulaires SAB, SBC, SCD, SDE, SEA, est une pyramide.

391. La pyramide SABCDE a pour *base* le polygone ABCDE et pour *sommet* le point S. Sa *hauteur* est la distance du sommet S à la base ABCDE, c'est-à-dire la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan.

Les droites SA, SB, SC, etc., sont les *arêtes latérales* de la pyramide, et la somme des faces triangulaires SAB, SBC, SCD, etc., constitue son *aire latérale*.

392. La pyramide est *régulière* lorsque sa base est un polygone régulier dont le centre se confond avec le pied de la hauteur de la pyramide.

Les arêtes latérales d'une pyramide régulière sont nécessairement égales comme obliques s'écartant également du pied de la hauteur; ses faces latérales sont donc des triangles isocèles tous égaux entre eux. La hauteur d'un de ces triangles est l'*apothème* de la pyramide régulière.

393. Suivant que la base de la pyramide est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, un hexagone, etc., la pyramide est dite *triangulaire, quadrangulaire, pentagonale, hexagonale, etc.*

394. Toute pyramide triangulaire ayant quatre faces, on lui donne souvent aussi le nom de *tétraèdre* (355).

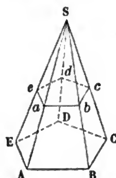
D'après la définition générale de la pyramide, on voit qu'on a le droit de prendre pour base d'un tétraèdre telle face qu'on veut; le sommet du tétraèdre est alors le sommet opposé à la base choisie.

Les tétraèdres sont dans la Géométrie de l'espace ce que les triangles sont dans la Géométrie plane. On fixe la position d'un point sur un plan en le rattachant par un triangle à deux points donnés. On fixe la position d'un point dans l'espace en le rattachant par un tétraèdre à trois points donnés.

395. Si l'on coupe une pyramide par un plan qui rencontre toutes ses faces latérales, le polyèdre compris entre la section obtenue et la base de la pyramide est une *pyramide tronquée* ou un *tronc de pyramide.*

Si le plan sécant est parallèle au plan de la base de la pyramide, le tronc de pyramide est dit à *bases parallèles.*

Fig. 239.



Soit (*fig.* 239) la pyramide SABCDE. Coupons cette pyramide par le plan *abcde* parallèle à la base ABCDE, et compris entre cette base et le sommet S. La section *abcde* et la base ABCDE sont les bases du tronc de pyramide à bases parallèles ABCDE*abcde*. La *hauteur* du tronc est la distance constante des plans de ses deux bases. Les segments A*a*, B*b*, C*c*, etc., sont ses *arêtes latérales*, et son *aire latérale* est la somme des trapèzes AB*ab*, BC*bc*, CD*cd*, etc.

396. Si la pyramide considérée est régulière, le tronc de pyramide à bases parallèles qui lui correspond est un tronc de pyramide *régulier.*

THÉORÈME.

397. *Si une pyramide est coupée par un plan parallèle à sa base :*

1° *Ses arêtes latérales et sa hauteur sont divisées en parties proportionnelles ;*

2° *La section est un polygone semblable à la base de la pyramide.*

Fig. 240.

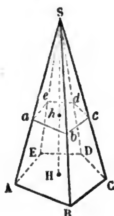
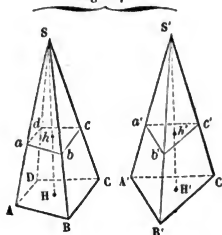


Fig. 241.



1° Soit (*fig.* 240) la pyramide SABCDE coupée par le plan *abcde* parallèle à sa base. Ce plan rencontre les arêtes latérales SA, SB, SC, etc., et la hauteur SH de la pyramide aux points *a*, *b*, *c*,..., *h*. Deux plans parallèles coupant en parties proportionnelles une série de sécantes issues d'un même point (307), on peut écrire immédiatement

$$\frac{Sa}{SA}=\frac{Sb}{SB}=\frac{Sc}{SC}=\ldots=\frac{Sh}{SH}.$$

2° Les polygones ABCDE et *abcde* ont leurs côtés deux à deux parallèles (301) et dirigés dans le même sens. Les angles homologues de ces polygones sont donc égaux (297). De plus, le parallélisme de leurs côtés entraîne la similitude des triangles SAB et S*ab*, SBC et S*bc*, etc. Par suite,

$$\frac{ab}{AB}=\frac{Sb}{SB},\quad \frac{Sb}{SB}=\frac{bc}{BC},\quad \text{d'où}\quad \frac{ab}{AB}=\frac{bc}{BC}.$$

On prouverait de la même manière qu'on a

$$\frac{bc}{BC}=\frac{cd}{CD}=\frac{de}{DE}=\frac{ea}{EA}.$$

Les polygones ABCDE et *abcde,* ayant leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels, sont semblables.

Corollaire.

398. La similitude des triangles SAB et S*ab* donne $\frac{ab}{AB} = \frac{Sa}{SA}$, ou, d'après ce qui précède, $\frac{ab}{AB} = \frac{Sh}{SH}$.

La similitude des polygones ABCDE et *abcde* donne à son tour

$$\frac{abcde}{ABCDE} = \frac{\overline{ab}^2}{\overline{AB}^2}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{abcde}{ABCDE} = \frac{\overline{sh}^2}{\overline{SH}^2}.$$

Donc, *dans une pyramide, les sections parallèles à la base et la base elle-même sont proportionnelles aux carrés de leurs distances au sommet de la pyramide.*

Scolie.

399. Si l'on coupe une pyramide régulière par un plan parallèle à la base, la section *abcde,* étant semblable à la base ABCDE, est aussi un polygone régulier. Comme les arêtes latérales d'une pyramide régulière sont égales, il en est de même des arêtes latérales du tronc de pyramide régulier obtenu. Les faces latérales d'un tronc de pyramide régulier sont donc des trapèzes isocèles tous égaux entre eux. La hauteur d'un de ces trapèzes est l'*apothème* du tronc de pyramide.

THÉORÈME.

400. *Lorsque deux pyramides ont des hauteurs égales, les sections faites dans ces pyramides parallèlement à leurs bases et à la même distance de leurs sommets sont proportionnelles aux bases des deux pyramides.*

Soient (*fig.* 241) les deux pyramides SABCD, S'A'B'C', dont les hauteurs SH et S'H' sont égales. Prenons $Sh = S'h'$ et, par les points *h* et *h'*, menons la section *abcd* parallèle à la base ABCD et la section *a'b'c'* parallèle à la base A'B'C'. Nous aurons (398)

$$\frac{abcd}{ABCD} = \frac{\overline{Sh}^2}{\overline{SH}^2}, \quad \frac{a'b'c'}{A'B'C'} = \frac{\overline{S'h'}^2}{\overline{S'H'}^2},$$

c'est-à-dire, en vertu de l'hypothèse et de la construction,

$$\frac{abcd}{ABCD} = \frac{a'b'c'}{A'B'C'}.$$

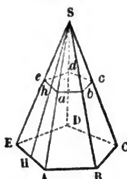
Scolie.

401. *Si les bases des deux pyramides sont équivalentes, les sections obtenues sont équivalentes.*

THÉORÈME.

402. *L'aire latérale d'une pyramide régulière a pour mesure la moitié du produit du périmètre de sa base par son apothème.*

Fig. 242.



Soit (*fig.* 242) la pyramide régulière SABCDE. Les triangles isocèles et égaux qui composent son aire latérale ayant respectivement pour bases les côtés AB, BC,..., EA, de la base de la pyramide, et pour hauteur son apothème SH (392), la somme des aires de ces triangles, c'est-à-dire l'aire demandée, a pour mesure la moitié du produit de la somme des côtés AB, BC,..., EA, par l'apothème SH, c'est-à-dire la moitié du produit du périmètre de la base de la pyramide par son apothème.

Scolie.

403. *L'aire latérale d'un tronc de pyramide régulier a pour mesure le produit de la demi-somme des périmètres de ses deux bases par son apothème.*

Soit (*fig.* 242) le tronc de pyramide régulier ABCDE*abcde*. Les trapèzes isocèles et égaux qui composent son aire latérale ayant respectivement pour bases les côtés AB et *ab*, BC et

bc,..., EA et *ea*, des bases du tronc de pyramide, et pour hauteur son apothème H*h* (399), la somme des aires de ces trapèzes, c'est-à-dire l'aire demandée, aura pour mesure le produit de la demi-somme des côtés AB et *ab*, BC et *bc*,..., EA et *ea*, par l'apothème H*h*, c'est-à-dire le produit de la demi-somme des périmètres des deux bases du tronc de pyramide par son apothème.

EXERCICES.

1. Les plans menés perpendiculairement sur les milieux des arêtes d'un tétraèdre se rencontrent en un même point.

2. Les plans bissecteurs des angles dièdres d'un tétraèdre se rencontrent en un même point.

3. Les perpendiculaires élevées sur chaque face d'un tétraèdre par le centre du cercle circonscrit à la face considérée, se rencontrent en un même point.

4. Les droites qui joignent les sommets d'un tétraèdre aux points d'intersection des médianes des faces opposées se rencontrent en un même point, situé au quart de chacune de ces droites à partir de la face correspondante.

5. Les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre se coupent mutuellement en parties égales.

6. Si l'on coupe un prisme ou une pyramide par un plan non parallèle à la base, et si l'on prolonge les côtés de la section jusqu'à la rencontre des côtés correspondants de la base, les points d'intersection obtenus sont en ligne droite.

7. Étant données les faces d'un tétraèdre, trouver, en ne se servant que du compas, la longueur de la hauteur du tétraèdre et le pied de cette hauteur sur le plan de la base.

8. Le plan bissecteur de l'angle dièdre d'un tétraèdre partage l'arête opposée en deux segments proportionnels aux faces qui comprennent l'angle dièdre. — Considérer le plan bissecteur de l'angle dièdre extérieur.

9. Si par la droite DE, qui joint les milieux de deux arêtes opposées SA, BC, d'un tétraèdre SABC, on mène un plan quelconque qui coupe l'arête SB en F et l'arête AC en G, la droite FG est divisée par la droite DE en deux parties égales.

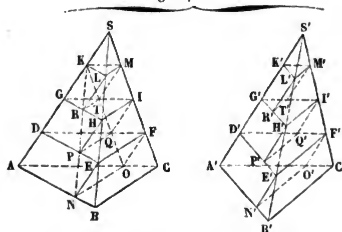
§ IV.

Programme officiel : *Volume de la pyramide, du tronc de pyramide à bases parallèles.*

THÉORÈME.

404. *Deux pyramides triangulaires de bases équivalentes et de hauteurs égales, sont équivalentes.*

Fig. 243.



Soient (*fig.* 243) SABC et S'A'B'C' les deux pyramides proposées. Si leurs bases ABC, A'B'C', sont placées sur un même plan, leurs sommets S et S' seront à la même distance du plan commun des deux bases, puisque ces pyramides ont même hauteur.

Divisons l'arête SA en un certain nombre de parties égales aux points D, G, K, et par ces points menons des plans parallèles au plan commun des bases. Nous déterminerons ainsi dans la première pyramide les sections DEF, GHI, KLM, et dans la seconde pyramide les sections correspondantes D'E'F', G'H'I', K'L'M'.

Comme les bases des deux pyramides sont équivalentes, les sections faites dans ces pyramides par un même plan parallèle au plan commun des bases sont équivalentes (401). La section DEF est équivalente à la section D'E'F', la section GHI à la section G'H'I', etc.

Construisons maintenant un prisme sur la section DEF comme base et sur la division DA comme arête. Il suffit pour cela (357) de mener par les points E et F, jusqu'à la rencontre

des arêtes AB et AC, des parallèles EN et FO à DA ou SA, et de tracer la droite NO. En agissant de même pour les autres sections GHI, KLM, et les autres divisions GD, KG, on inscrira dans la pyramide SABC un nombre de prismes égal à celui des sections primitivement obtenues, et tous ces prismes inscrits auront pour hauteur la distance constante de deux plans sécants consécutifs.

En opérant d'une manière identique, on inscrit dans la seconde pyramide S′A′B′C′ les prismes D′E′F′A′N′O′, G′H′I′D′P′Q′,..., qui sont en même nombre que ceux inscrits dans la pyramide SABC.

Les prismes de même rang dans les deux pyramides sont équivalents comme ayant des bases équivalentes et des hauteurs égales (389). Le prisme GHIDPQ, par exemple, est équivalent au prisme G′H′I′D′P′Q′, parce que les deux sections correspondantes GHI, G′H′I′, sont équivalentes, et parce que les hauteurs de ces prismes représentent toutes deux la $n^{ième}$ partie de la hauteur commune des pyramides données, si l'on a divisé l'arête SA en n parties égales.

Donc, la somme des prismes inscrits dans la pyramide SABC est équivalente à la somme des prismes inscrits dans la pyramide S′A′B′C′. Or, si l'on fait croître indéfiniment le nombre des divisions égales de l'arête SA, la somme des prismes inscrits dans la pyramide SABC a pour limite le volume de cette pyramide. En effet, les points K, R, P, N, sont en ligne droite, puisque les droites SK, LR, HP, EN, sont égales et parallèles, et la droite KN est parallèle à SB. De même, les points K, T, Q, O, sont sur une droite KO parallèle à SC. Le plan KNO est donc parallèle à la face SBC, et le polyèdre KNOSBC est un tronc de pyramide à bases parallèles dont la hauteur, distance des deux plans KNO, SBC, est au plus égale à SK = AD. Or, la limite de AD, quand on fait croître indéfiniment le nombre des divisions égales de l'arête SA, est zéro. Donc la hauteur du tronc de pyramide KNOSBC tend vers zéro, et il en est de même, par conséquent, du volume de ce tronc. Mais ce volume est évidemment supérieur à la différence qui existe entre la pyramide SABC et la somme des prismes qui y sont inscrits. Cette différence s'annule donc à la limite.

On prouverait de même que la différence entre la pyramide

S'A'B'C' et la somme des prismes qui y sont inscrits a zéro pour limite.

Les deux sommes de prismes étant constamment équivalentes, leurs limites, c'est-à-dire les volumes des deux pyramides SABC, S'A'B'C', sont égaux.

THÉORÈME.

405. *Le volume d'une pyramide a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Fig. 244.

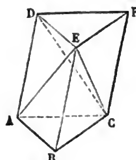
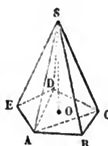


Fig. 245.



1° Soit (*fig.* 244) la pyramide triangulaire EABC. Par les sommets A et C, menons les droites AD et CF, parallèles à l'arête BE, jusqu'à leur rencontre D et F avec un plan mené par le sommet E parallèlement à la base ABC de la pyramide. Le polyèdre ABCDEF sera un prisme triangulaire ayant même base et même hauteur que la pyramide proposée.

En faisant passer un plan par les trois sommets D, E, C, on décompose le prisme triangulaire ABCDEF en trois pyramides triangulaires EABC, EDCA, EDCF. La première est la pyramide donnée. Les deux autres sont équivalentes, car elles ont même hauteur et leurs bases sont équivalentes comme moitiés du parallélogramme ACFD (404). Or, si l'on prend la face DEF pour base de la pyramide EDCF, son sommet est le point C. Cette pyramide a donc même base et même hauteur que le prisme ABCDEF; elle est donc équivalente à la pyramide EABC.

Les trois pyramides dont se compose le prisme ABCDEF etant équivalentes, chacune d'elles est le tiers de ce prisme. Or, le volume du prisme a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur; le volume de la pyramide EABC a donc pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

2° Soit (*fig.* 245) la pyramide polygonale SABCDE. On la décompose en pyramides triangulaires en faisant passer des plans par l'arête SA, et chacune des arêtes SC, SD. Ces pyramides triangulaires ont pour bases les triangles ABC, ACD, ADE, qui composent la base de la pyramide donnée, et leur hauteur commune est celle de cette pyramide. La somme de leurs mesures ou la mesure de la pyramide SABCDE sera donc égale au tiers du produit de sa base ABCDE par sa hauteur SO.

COROLLAIRES.

406. En désignant par V, B, H, les trois nombres qui mesurent respectivement le volume d'une pyramide, sa base et sa hauteur, on a la formule générale

$$V = \frac{1}{3} B.H.$$

Donc *toute pyramide est le tiers du prisme de même base et de même hauteur. Deux pyramides quelconques de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalentes. Deux pyramides sont entre elles comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur. Deux pyramides de même base sont entre elles comme leurs hauteurs. Deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases.*

407. Quand un tétraèdre est régulier, son volume s'exprime en fonction de son arête a.

Un tétraèdre régulier est compris sous quatre triangles équilatéraux égaux. Sa base a donc pour expression (256)

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Sa hauteur est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant pour second côté de l'angle droit le rayon du cercle circonscrit au triangle de base, c'est-à-dire $\frac{a}{\sqrt{3}}$, et pour hypoténuse l'arête a du tétraèdre. Cette hauteur est, par suite,

$$\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

On a donc, pour le volume du tétraèdre régulier en fonction de son arête,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

EXEMPLE.

Quel est le volume du tétraèdre régulier dont l'arête est 1 mètre?

On a

$$V = \frac{1^{mc}.\sqrt{2}}{12} = \frac{1^{mc},4142136}{12} = 0^{mc},117851$$

à $\frac{1}{2}$ centimètre cube près.

SCOLIE.

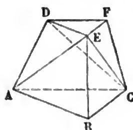
408. Pour évaluer le volume d'un polyèdre, il suffit de décomposer ce polyèdre en pyramides, de calculer les volumes de ces pyramides et de faire la somme des nombres obtenus. Plus généralement, il suffit de décomposer le polyèdre proposé en parties telles, que l'expression de leur volume soit connue.

Si l'on peut trouver dans l'intérieur du polyèdre un point à égale distance de toutes ses faces, les pyramides qui le composeront auront pour hauteur commune la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'une des faces, et *le volume du polyèdre aura pour mesure le tiers du produit de son aire par cette perpendiculaire.*

THÉORÈME.

409. *Un tronc de pyramide à bases parallèles est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc, et pour bases respectives les deux bases du tronc et la moyenne proportionnelle entre ces deux bases.*

Fig. 246.



1° Soit (*fig.* 246) le tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles ABCDEF.

Faisons passer un plan par les trois sommets A, E, C, puis un autre plan par les trois sommets D, E, C. Nous partagerons le tronc en trois pyramides triangulaires EABC, EDCF, EDCA.

La première EABC a pour base la base inférieure ABC du tronc de pyramide, et elle a même hauteur que ce tronc, puisque son sommet E est un sommet de la base supérieure.

Si l'on prend le point C pour sommet de la seconde pyramide EDCF, sa base DEF est la base supérieure du tronc, et elle a même hauteur que ce tronc, puisque son sommet C se confond avec un sommet de la base inférieure.

Dans le cas du prisme triangulaire (405), les deux pyramides EDCA, EDCF, étaient équivalentes, de sorte que le volume de l'une faisait connaître celui de l'autre. Ici, ces volumes sont inégaux, et, pour déduire le volume de la pyramide EDCA de celui de la pyramide EDCF, on est conduit à chercher leur rapport.

Les deux pyramides EDCA, EDCF, ayant même hauteur, sont entre elles comme leurs bases CDA, CDF, c'est-à-dire, puisque ces deux triangles ont même hauteur, comme les bases AC et DF de ces triangles. D'ailleurs les bases du tronc étant semblables (397), on a (276)

$$\frac{AC}{DF} = \frac{\sqrt{ABC}}{\sqrt{DEF}}.$$

Tel est le rapport cherché.

Mais la pyramide EDCF a pour mesure le tiers du produit de la hauteur du tronc par sa base DEF. La pyramide EDCA aura donc pour mesure le tiers du produit de la hauteur du tronc par l'expression

$$DEF \cdot \frac{\sqrt{ABC}}{\sqrt{DEF}} = \sqrt{ABC . DEF}.$$

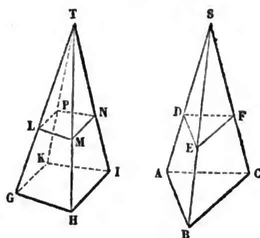
La pyramide EDCA équivaut par suite à une pyramide ayant pour hauteur la hauteur du tronc, et pour base la moyenne proportionnelle entre ses deux bases.

2° Soit (*fig.* 247) le tronc de pyramide polygonal GHIKLMNP.

Ce tronc a été obtenu en coupant la pyramide TGHIK par

un plan parallèle à sa base. Prenons un point S à la même hauteur que le point T au-dessus de la base GHIK, et construisons dans le plan de cette base un triangle ABC qui lui soit

Fig. 247.



équivalent. La pyramide triangulaire SABC sera équivalente à la pyramide polygonale TGHIK (406). Si l'on prolonge le plan LMNP jusqu'à la pyramide SABC, il déterminera dans cette pyramide une section DEF équivalente à la section LMNP (401); les deux pyramides SDEF, TLMNP seront donc aussi équivalentes. Par suite, le tronc polygonal GHIKLMNP, différence des pyramides TGHIK, TLMNP, sera équivalent au tronc triangulaire ABCDEF, différence des pyramides SABC, SDEF. Et comme le tronc de pyramide triangulaire est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc et pour bases respectives les deux bases du tronc et la moyenne proportionnelle entre ces deux bases, il en sera de même du tronc de pyramide polygonal qui a même hauteur et des bases équivalentes.

COROLLAIRES.

410. En désignant par V, B, b, h, les nombres qui mesurent respectivement le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles, ses deux bases et sa hauteur, on a la formule

$$V = \frac{1}{3} Bh + \frac{1}{3} bh + \frac{1}{3} h\sqrt{Bb}$$

ou

(1) $$V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{Bb}).$$

411. Souvent, au lieu de donner les deux bases B et b, on donne l'une d'elles B et le rapport $\frac{a}{A}$ de deux côtés homologues de ces deux bases; on a alors

$$\frac{b}{B}=\frac{a^2}{A^2},\quad \text{d'où}\quad b=\frac{a^2}{A^2}B.$$

Il en résulte

(2) $$V=\frac{Bh}{3}\left(1+\frac{a}{A}+\frac{a^2}{A^2}\right).$$

Cette formule, très-commode dans les applications, se trouve dans un Traité de Léonard de Pise sur *les centres de gravité.*

EXEMPLE.

Les bases parallèles d'un tronc de pyramide sont deux hexagones réguliers ayant respectivement 1 *mètre et* 2 *mètres de côté, sa hauteur est égale à* 3 *mètres; calculer son volume.*

On a dans ce cas

$$B=\frac{3A^2\sqrt{3}}{2}=6^{mq}.\sqrt{3}$$

et, en appliquant la formule (2),

$$V=\frac{6.\sqrt{3}.3}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right),$$

c'est-à-dire

$$V=3.\sqrt{3}.3,5=18^{mc},186534$$

à 1 centimètre cube près.

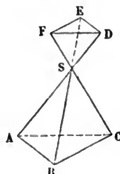
412. On peut donner au mot *tronc* une extension utile.

De même que les théorèmes relatifs aux sections d'un prisme s'étendent au cas où elles sont extérieures (371), les théorèmes relatifs aux sections d'une pyramide (397) s'étendent aux cas où ces sections deviennent extérieures, qu'elles soient faites au delà du sommet ou au-dessous de la base de la pyramide proposée. Les plans sécants doivent seulement rester parallèles à la base de cette pyramide.

On peut distinguer les deux cas possibles en disant que les sections faites au-dessous du sommet donnent des troncs de *première espèce*, et que les sections faites au-dessus du sommet donnent des troncs de *seconde espèce*.

Pour évaluer le volume d'un tronc de seconde espèce ABCDEF (*fig.* 248), il suffit d'effectuer la somme des pyra-

Fig. 248.



mides SABC, SDEF. La hauteur h du tronc est d'ailleurs égale à la somme des hauteurs H et H′ des deux pyramides. On a ainsi, en conservant les notations du n° 410,

$$V = \frac{1}{3}BH + \frac{1}{3}bH' = \frac{B}{3}\left(H + \frac{bH'}{B}\right).$$

De la relation (398)

$$\frac{B}{b} = \frac{A^2}{a^2} = \frac{H^2}{H'^2},$$

il résulte

$$\frac{H}{A} = \frac{H'}{a} = \frac{H+H'}{A+a} = \frac{h}{A+a},$$

d'où

$$H = \frac{Ah}{A+a}, \quad H' = \frac{ah}{A+a}.$$

Par suite,

$$V = \frac{Bh}{3}\cdot\frac{A^3+a^3}{A^2(A+a)} = \frac{Bh}{3}\left(1 - \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2}\right),$$

et aussi

$$V = \frac{h}{3}\left(B - \frac{Ba}{A} + \frac{Ba^2}{A^2}\right) = \frac{h}{3}(B + b - \sqrt{Bb}).$$

Pour un tronc de seconde espèce, la formule du volume est donc la même que pour un tronc de première espèce, sauf le signe de la moyenne proportionnelle. On passe donc de l'une à l'autre formule en changeant le signe de cette moyenne ou en changeant a en $-a$.

PROBLÈME.

413. *On donne le volume* $V = 10^{mc},5$, *la hauteur* $h = 1^{m}\sqrt{3}$ *et le côté* $A = 2^{m}$ *de la base inférieure d'un tronc de pyramide à bases parallèles; on suppose que cette base est un hexagone régulier, et l'on demande le côté* x *de l'hexagone régulier, base supérieure du tronc.*

L'équation du problème sera l'équation (2) du n° **411**, dans laquelle on remplacera a par l'inconnue x, c'est-à-dire

$$V = \frac{Bh}{3}\left(1 + \frac{x}{A} + \frac{x^2}{A^2}\right),$$

d'où, puisqu'on a ici $B = \frac{3A^2\sqrt{3}}{2}$,

$$x^2 + Ax + A^2 - \frac{2V}{h\sqrt{3}} = 0;$$

et, en substituant les nombres donnés,

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Les racines de cette équation sont

$$x' = 1^{m} \quad \text{et} \quad x'' = -3^{m}.$$

La première répond à un tronc de première espèce; la seconde, prise *positivement*, à un tronc de seconde espèce.

EXERCICES.

1. Démontrer que deux tétraèdres sont égaux : 1° lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune et semblablement disposées; 2° lorsqu'ils ont une face égale adjacente à trois angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés; 3° lorsqu'ils ont trois faces égales chacune à chacune et semblablement disposées; 4° lorsqu'ils ont une arête égale et cinq angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.

2. Trouver dans l'intérieur d'un tétraèdre un point tel, qu'en le joignant aux quatre sommets, on décompose ce tétraèdre en quatre tétraèdres équivalents.

3. Si l'on prend un point O dans l'intérieur d'un tétraèdre SABC, et si l'on prolonge les droites SO, AO, BO, CO, jusqu'à la rencontre des faces

opposées en s, a, b, c, on a la relation

$$\frac{Os}{Ss}+\frac{Oa}{Aa}+\frac{Ob}{Bb}+\frac{Oc}{Cc}=1.$$

4. Le plan déterminé par une arête d'un tétraèdre et le milieu de l'arête opposée partage ce tétraèdre en deux tétraèdres équivalents.

5. Tout plan conduit par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre le partage en deux volumes égaux.

6. Quelle est la différence des volumes d'un tronc de pyramide à bases parallèles et d'un prisme de même hauteur ayant pour base la demi-somme des bases du tronc de pyramide? — Quelle erreur commet-on en remplaçant l'un des volumes par l'autre, pour une hauteur de 6 mètres et pour des bases du tronc de pyramide égales à $3^{mq},75$ et $2^{mq},85$?

7. Trouver l'expression du volume d'un tronc de pyramide quelconque à bases parallèles, en le décomposant en troncs de pyramide triangulaires.

8. La hauteur d'un tétraèdre régulier est égale à la somme des perpendiculaires abaissées d'un point pris dans l'intérieur du polyèdre sur ses quatre faces.— Examiner le cas où le point est choisi extérieurement.

9. Mener un plan parallèle à la base d'un tétraèdre donné, de manière que ce plan détermine un autre tétraèdre dont l'aire totale soit la moitié de celle du tétraèdre donné.

10. Étant données trois droites parallèles non situées dans un même plan, on porte sur l'une d'elles une longueur AB donnée, et l'on prend arbitrairement un point C sur la seconde droite, un point D sur la troisième; démontrer :

1° Que le volume de la pyramide triangulaire ABCD est constant, quelles que soient les positions des points C et D et la parallèle sur laquelle on porte la longueur AB; 2° que ce volume est proportionnel à AB.

11. Étant donné un tétraèdre SABC, on construit sur les faces SAB, SBC, SAC, trois prismes triangulaires de hauteur arbitraire dont les bases supérieures se rencontrent en O; sur la base ABC du tétraèdre, on construit alors un quatrième prisme triangulaire en prenant ses arêtes latérales égales et parallèles à la droite SO : démontrer que le volume de ce dernier prisme est équivalent à la somme des volumes des trois premiers prismes.

§ V.

Programme officiel : *Notions sur les polyèdres semblables, rapports des surfaces et des volumes.*

DÉFINITIONS.

414. On donne le nom de *polyèdres semblables* aux polyèdres qui ont leurs angles polyèdres égaux et qui sont compris sous un même nombre de faces semblables chacune à chacune.

L'égalité des angles polyèdres entraîne évidemment l'égalité des angles dièdres homologues.

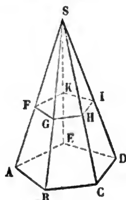
On appelle *homologues* les éléments (faces, arêtes, dièdres, etc.) qui se correspondent dans deux polyèdres semblables.

415. *Les arêtes homologues de deux polyèdres semblables sont proportionnelles.* Car les faces semblables de ces polyèdres ayant le même rapport de similitude (175), puisqu'une même arête appartient sur chaque polyèdre à deux faces adjacentes, le rapport de deux arêtes homologues quelconques est constant.

THÉORÈME.

416. *En coupant une pyramide par un plan parallèle à la base, on détermine une seconde pyramide semblable à la première.*

Fig. 249.



Soit (*fig.* 249) la pyramide SABCDE dans laquelle un plan parallèle à la base a déterminé la section FGHIK. Les deux pyramides SABCDE, SFGHIK, ont leurs faces semblables; car

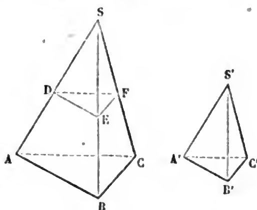
les polygones ABCDE, FGHIK, sont semblables (397), et les faces latérales SAB et SFG, SBC et SGH, etc., le sont aussi (176), par suite du parallélisme des côtés de ces deux polygones.

Quant aux angles polyèdres, l'angle polyèdre S est commun, et deux angles trièdres homologues tels que A et F sont égaux; en effet, on peut les faire coïncider, puisqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune et semblablement disposées, savoir : l'angle dièdre SA commun, la face SAB égale à la face SFG, et la face SAE égale à la face SFK.

THÉORÈME.

417. *Deux pyramides triangulaires sont semblables, lorsqu'elles ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées.*

Fig 250.



Soient (*fig.* 250) les pyramides SABC, S'A'B'C', dans lesquelles l'angle dièdre SA est égal à l'angle dièdre S'A', et les faces SAB, SAC, semblables aux faces S'A'B', S'A'C', et semblablement placées.

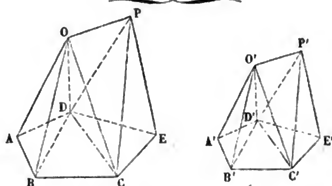
Portons la seconde pyramide sur la première, de manière qu'elles aient même sommet et que les faces homologues de leurs angles dièdres égaux coïncident. Le triangle S'A'B' étant semblable au triangle SAB et le point A' tombant en D sur SA, S'B' se confondra avec SB, et le point B' viendra en un point E tel, que DE soit parallèle à AB. De même, le triangle S'A'C' étant semblable au triangle SAC, S'C' se confondra avec SC, et le point C' viendra en un point F tel, que DF soit parallèle à AC. La base A'B'C' occupera donc alors la position DEF, et

son plan sera parallèle au plan de la base ABC (297). La pyramide SDEF étant semblable à la pyramide SABC (416), il en est de même de la pyramide S'A'B'C' qu'elle représente.

THÉORÈME.

418. *Deux polyèdres, composés d'un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun et semblablement disposés, sont semblables.*

Fig. 251.



Soient (*fig.* 251) OABD, DOBC, CDOP, PCDE, etc., O'A'B'D', D'O'B'C', C'D'O'P', P'C'D'E', etc., deux séries de tétraèdres respectivement semblables et semblablement disposés; le polyèdre formé par les premiers tétraèdres est semblable au polyèdre formé par les seconds.

En effet :

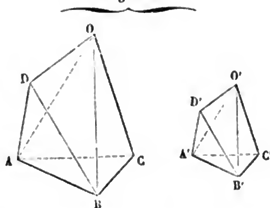
1° Les faces homologues des deux polyèdres sont semblables comme composées d'un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés. Considérons, par exemple, la face ABCD du premier polyèdre. Les triangles ABD, BCD, qui la constituent sont semblables aux triangles A'B'D', B'C'D', comme faces homologues de tétraèdres semblables. De plus, les triangles ABD, BCD, étant dans un même plan, les angles dièdres OBDA, OBDC, des deux tétraèdres OABD, DOBC, sont supplémentaires (337); il en est donc de même des angles dièdres homologues O'B'D'A', O'B'D'C', des tétraèdres semblables O'A'B'D', D'O'B'C'. Par suite, les deux triangles A'B'D', B'C'D', sont aussi dans un même plan, et constituent sur le second polyèdre une face A'B'C'D' semblable à la face ABCD.

2° Les angles polyèdres des deux polyèdres sont égaux comme ayant tous leurs éléments égaux et semblablement

disposés; car les faces homologues des deux polyèdres étant semblables et semblablement disposées, leurs angles polyèdres ont d'abord toutes leurs faces égales chacune à chacune et semblablement disposées. De plus, les angles dièdres homologues de ces angles polyèdres sont égaux, soit comme dièdres homologues de deux tétraèdres semblables, soit comme sommes d'angles dièdres égaux. L'angle dièdre BCDE, par exemple, formé par les deux faces ABCD, CDE, du premier polyèdre, est la somme des trois angles dièdres BCDO, ODCP, PDCE, qui appartiennent aux trois tétraèdres DOBC, CDOP, PCDE; et l'angle dièdre B'C'D'E', formé par les deux faces A'B'C'D', C'D'E', du second polyèdre, est la somme des trois angles dièdres homologues B'C'D'O', O'D'C'P', P'D'C'E', qui appartiennent aux trois tétraèdres semblables D'O'B'C', C'D'O'P', P'C'D'E'.

419. Réciproquement, *deux polyèdres semblables peuvent être décomposés en un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement disposés.*

Fig. 252.



Soit (*fig.* 252) un point O pris dans l'intérieur du premier polyèdre; décomposons-le en tétraèdres en prenant le point O pour centre de décomposition, c'est-à-dire en joignant ce point à tous les sommets du polyèdre dont on a d'abord partagé les faces en triangles; et soit OABC l'un des tétraèdres obtenus. Les points A, B, C, ayant pour homologues sur le second polyèdre les points A', B', C', menons un plan O'A'B' faisant au-dessus de A'B'C' un angle dièdre égal à celui que forme le plan AOB au-dessus de ABC, et dans ce plan O'A'B' construisons le triangle O'A'B' semblable au triangle OAB. En prenant le point O' pour centre de décomposition, on décomposera le second polyèdre en tétraèdres placés semblablement à ceux

du premier polyèdre, et il reste seulement à prouver que ces tétraèdres sont semblables deux à deux, les premiers OABC, O'A'B'C', l'étant par construction (417).

Soit D un quatrième sommet du premier polyèdre tel, que les deux triangles ABC, ABD, aient un côté commun, et soient situés sur la même face ou sur deux faces adjacentes. Comparons les deux tétraèdres OABD, O'A'B'D'. Les faces OAB, O'A'B', sont semblables comme faces homologues des deux tétraèdres semblables OABC, O'A'B'C'; les faces ABD, A'B'D', le sont aussi comme triangles homologues de deux faces semblables des polyèdres donnés. De plus, si les deux triangles ABC, ABD, sont dans un même plan, les deux dièdres OABD, O'A'B'D', sont égaux comme suppléments des angles dièdres égaux OABC, O'A'B'C'; si les deux triangles ABC, ABD, ne sont pas dans un même plan, les deux angles dièdres OABD, O'A'B'D', sont encore égaux comme différences des angles dièdres égaux DABC et OABC d'une part, D'A'B'C' et O'A'B'C' d'autre part (414). Dans les deux cas, les tétraèdres OABD, O'A'B'D', sont semblables (417).

La même démonstration s'appliquera de proche en proche. La similitude des deux tétraèdres considérés en dernier lieu permettra toujours de vérifier la similitude des deux tétraèdres suivants.

Scolies.

420. Deux points O et O' rapportés à deux polyèdres semblables sont dits *homologues*, lorsqu'en joignant l'un d'eux O aux sommets consécutifs A, B, C, de l'un des polyèdres, et l'autre O' aux sommets homologues A', B', C', de l'autre polyèdre, on obtient deux tétraèdres OABC, O'A'B'C', semblables et semblablement disposés par rapport aux deux polyèdres.

Il résulte de la démonstration précédente que deux points homologues quelconques peuvent être pris pour centres de décomposition de deux polyèdres semblables en tétraèdres semblables et semblablement disposés.

Si le point O est extérieur au premier polyèdre, son homologue O' est aussi extérieur au second polyèdre; il faut alors considérer les deux polyèdres comme composés de tétraèdres additifs et de tétraèdres soustractifs.

Si le point O coïncide avec l'un des sommets A du premier polyèdre, son homologue O' coïncide avec le sommet A' du second polyèdre, et les diagonales homologues des deux polyèdres, relatives aux sommets A et A', se confondent avec les arêtes latérales de leurs tétraèdres homologues.

421. Deux droites rapportées à deux polyèdres semblables sont dites *homologues*, lorsque leurs extrémités sont deux à deux des points homologues. Telles sont, par exemple, les diagonales relatives à des sommets homologues.

Le rapport de deux droites homologues quelconques est égal au rapport de similitude des faces homologues des deux polyèdres.

Fig. 253.

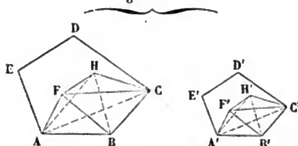
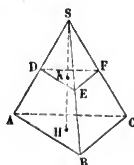


Fig. 254.



Soient (*fig.* 253) ABCDE, A'B'C'D'E', deux faces homologues quelconques des polyèdres donnés, et FH, F'H', deux droites homologues quelconques. Formons les tétraèdres homologues FABC, F'A'B'C'; HABC, H'A'B'C'. La similitude de ces tétraèdres entraîne celle des tétraèdres FHAC, F'H'A'C'. En effet, les faces FAC, HAC, sont respectivement semblables aux faces F'A'C', H'A'C', et l'angle dièdre FACH, différence des angles dièdres FACB, HACB, est égal à l'angle dièdre F'A'C'H', différence des angles dièdres égaux F'A'C'B', H'A'C'B'. Les deux tétraèdres FHAC, F'H'A'C', étant semblables, on a (415)

$$\frac{FH}{F'H'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

THÉORÈME.

422. *Le rapport des volumes de deux polyèdres semblables est égal au cube du rapport de similitude de leurs faces homo-*

logues, ou deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes des arêtes homologues.

Soient d'abord (*fig.* 254) deux tétraèdres semblables SABC, SDEF, qu'on peut toujours supposer placés l'un dans l'autre comme l'indique la figure (416), de manière que leurs bases ABC, DEF, soient parallèles.

Le premier tétraèdre SABC ayant pour base ABC et pour hauteur SH, son volume a pour expression

$$\frac{ABC.SH}{3}.$$

Le second tétraèdre ayant pour base DEF et pour hauteur SK, son volume est égal à

$$\frac{DEF.SK}{3}.$$

Le rapport cherché est, par suite, égal à

$$\frac{ABC.SH}{DEF.SK} = \frac{ABC}{DEF}.\frac{SH}{SK}.$$

Mais le plan DEF étant parallèle au plan ABC, on a (398, 397)

$$\frac{ABC}{DEF} = \frac{\overline{SH}^2}{\overline{SK}^2} \quad \text{et} \quad \frac{SH}{SK} = \frac{SA}{SD} = \frac{AB}{DE}.$$

Le rapport des volumes des deux tétraèdres est donc représenté par

$$\frac{\overline{SH}^3}{\overline{SK}^3} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{AB}^3}{\overline{DE}^3}.$$

Soient maintenant deux polyèdres semblables P et P'. Le rapport de similitude de leurs faces homologues sera (415) celui de deux arêtes homologues quelconques AB et A'B'. Ces deux polyèdres sont décomposables en un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement disposés (419), et le rapport de similitude des faces homologues de deux tétraèdres homologues est égal (421) au rapport $\frac{AB}{A'B'}$. Si le polyèdre P est composé des tétraèdres T, T_1, T_2, et le polyèdre P' des tétraèdres homologues T', T'_1, T'_2, on aura donc, d'après ce qui

précède,

$$\frac{T}{T'} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3}, \quad \frac{T_1}{T'_1} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3}, \quad \frac{T_2}{T'_2} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3},$$

et, par suite, en appliquant un théorème connu,

$$\frac{T + T_1 + T_2}{T' + T'_1 + T'_2} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{P'} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3}.$$

Scolie.

423. *Les aires de deux polyèdres semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs arêtes homologues.*

EXERCICES.

1. Étant donnée une pyramide dont l'une des arêtes SA est égale à 1 mètre, par quels points *a* et *a'* de cette arête faut-il mener des plans parallèles à la base de la pyramide pour partager son volume en trois parties équivalentes?

2. Déterminer les arêtes d'un parallélipipède rectangle, sachant qu'elles sont proportionnelles aux nombres *a*, *b*, *c*, et que le volume du parallélipipède est V.

3. Chercher le rapport des volumes de deux tétraèdres, dont l'un a été formé en menant par les sommets de l'autre des plans parallèles aux faces opposées.

4. Deux tétraèdres sont semblables : 1° lorsqu'ils ont une face semblable adjacente à trois angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés; 2° lorsqu'ils ont trois faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées; 3° lorsqu'ils ont cinq angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.

5. Les carrés des volumes de deux polyèdres semblables sont proportionnels aux cubes de deux faces homologues.

QUESTIONS PROPOSÉES

SUR LE SIXIÈME LIVRE.

1. Deux tétraèdres qui ont un angle trièdre égal, sont entre eux comme les produits respectifs des arêtes qui comprennent cet angle. — En déduire la première partie du théorème du n° 422.

2. Deux tétraèdres qui ont une arête égale et les angles dièdres cor-

respondants à cette arête égaux chacun à chacun, sont entre eux comme les produits des faces qui comprennent le dièdre égal.

3. Les arêtes latérales d'une pyramide triangulaire SABC ont pour longueurs L, M, N; on coupe cette pyramide par un plan *abc* non parallèle à la base, qui rencontre les arêtes latérales à des distances du sommet égales à l, m, n : trouver le volume du tronc de pyramide ainsi déterminé.

4. Soit un tétraèdre SABC; par un point O pris dans la face SBC, on mène aux arêtes SA, AB, AC, jusqu'aux faces ABC, SAC, SAB, les parallèles OD, OE, OF : démontrer la relation

$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{SA}}+\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{AB}}+\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{AC}}=1.$$

5. Soit un tétraèdre SABC coupé par un plan quelconque DEF : menons les diagonales des quadrilatères ABDE, BCFE, ACFD; ces diagonales se rencontrent deux à deux aux points G, H, K, et les droites SG, SH, SK, coupent elles-mêmes les côtés de la base ABC aux points L, M, N; démontrer : 1° que les transversales AM, BN, CL, se coupent en un même point O de la base ABC; 2° que les transversales SO, AH, BK, CG, se coupent en un même point P de l'espace. — Examiner le cas où la section DEF est parallèle à la base ABC.

6. Soit le tétraèdre SABC; menons une section quelconque DEF parallèle à la base ABC, et joignons les milieux des côtés de cette section aux sommets opposés de la base : les trois droites obtenues se croisent en un même point dont on demande le lieu.

7. Par un point quelconque pris dans l'intérieur de la base d'une pyramide régulière, on mène à cette base une perpendiculaire qui rencontre toutes les faces de la pyramide ou leurs prolongements; démontrer que la somme des distances des points de rencontre obtenus à la base de la pyramide est constante. — Considérer le cas où le pied de la perpendiculaire élevée à la base est extérieur à cette base.

8. Étant données les quatre hauteurs d'un tétraèdre et les distances d'un point à trois des faces, déterminer la distance de ce point à la quatrième face.

9. Quelle est la différence des volumes d'un tronc de pyramide à bases parallèles et d'un prisme de même hauteur ayant pour base la section faite dans le tronc de pyramide à égale distance de ses bases?

10. La base d'une pyramide régulière étant un hexagone de 3 mètres de côté, calculer la hauteur de cette pyramide, sachant que son aire latérale est dix fois l'aire de sa base.

11. Soit une pyramide triangulaire SABC. Par le milieu E de l'arête SB, on mène le plan DEF parallèle à la base ABC, le plan EGH parallèle à la face ASC et le plan EDH; la pyramide SABC se trouve ainsi décomposée en deux prismes triangulaires équivalents et en deux pyramides triangulaires équivalentes. On peut faire subir la même décomposition à la pyramide SDEF, et continuer ainsi indéfiniment : en déduire le volume de la pyramide SABC.

12. Étant donnée une pyramide triangulaire SABC, à quelle distance de la base ABC doit-on mener un plan parallèle *abc*, pour que le rapport des volumes de la pyramide S*abc* et du tronc de pyramide ABC*abc* soit égal à *m*?

13. Couper un tétraèdre par un plan parallèle à deux arêtes opposées, de manière que la section soit maximum.

14. Par la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre, on peut faire passer une infinité de plans; quel est celui qui détermine la section minimum?

15. Étant donné un prisme triangulaire, le couper par un plan tel, que la section soit semblable à un triangle donné.

16. Par un point S pris sur le prolongement de l'axe d'un prisme hexagonal régulier et par les côtés du triangle équilatéral obtenu en joignant de deux en deux les sommets de sa base supérieure, on fait passer des plans qui détachent du prisme trois tétraèdres et les remplacent par un tétraèdre unique reposant sur sa base supérieure; déterminer la position du point S qui rend minimum l'aire du décaèdre ainsi construit (alvéole des abeilles).

17. Sur une première droite AA′, on donne deux points fixes *a* et *b*; sur une seconde droite quelconque BB′, deux points mobiles *c* et *d* restent à une distance constante : chercher pour quelle position du segment *cd* l'aire de la pyramide *abcd* est minimum.

18. Construire deux droites qui soient dans le même rapport que deux cubes donnés.

19. Une droite comprise entre deux faces d'un polyèdre donné est divisée en plusieurs segments; sur chaque segment, considéré comme l'homologue de la droite donnée, on construit un polyèdre semblable au polyèdre donné. Démontrer que l'aire de ce polyèdre est égale au carré de la somme des racines carrées des aires des polyèdres segmentaires, et que son volume est égal au cube de la somme des racines cubiques des volumes de ces mêmes polyèdres.



LIVRE VII.

LES CORPS RONDS.

---

§ I.

Programme officiel : *Cylindre droit à base circulaire. — Mesure de la surface latérale et du volume. — Extension aux cylindres droits à base quelconque.*

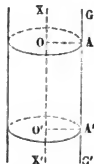
DÉFINITIONS.

424. On nomme *surface cylindrique de révolution* la surface engendrée par une droite GG′ qui tourne autour d'une droite fixe XX′ à laquelle elle est parallèle et invariablement liée (*fig.* 255).

La droite fixe XX′ reçoit le nom d'*axe* de la surface, et la droite mobile GG′ celui de *génératrice* ou d'*arête*.

425. Tout point A de la droite GG′ décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe et dont le centre est sur l'axe; car, pendant la rotation, la perpendiculaire AO abaissée du point A sur XX′ reste perpendiculaire à cet axe et conserve toujours la même longueur.

Fig. 255.



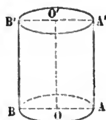
On appelle *section droite* toute section faite par un plan perpendiculaire à l'axe. Il résulte des considérations précédentes que *les diverses sections droites d'une même surface cylin-*

drique sont des circonférences égales : le rayon commun de ces cercles, c'est-à-dire la distance des deux parallèles XX′ et GG′, est dit *le rayon de la surface cylindrique,* et l'on voit que *le lieu des points de l'espace situés à une distance donnée d'une droite fixe est la surface cylindrique de révolution qui a cette droite pour axe et la distance donnée pour rayon.*

426. On appelle *cylindre de révolution* le corps compris entre une surface cylindrique et deux plans perpendiculaires à l'axe de cette surface, ou, en d'autres termes, la figure engendrée par la rotation d'un rectangle AA′O′O autour d'un de ses côtés OO′ (*fig.* 256).

La surface cylindrique engendrée par le côté AA′ est la *surface latérale* du cylindre; les cercles décrits par les côtés OA et O′A′ en sont les *bases,* et la droite OO′ en est la *hauteur.*

Fig. 256.



427. En construisant un prisme droit de même hauteur que le cylindre, et ayant pour base un polygone inscrit au cercle de base du cylindre, on obtient un *prisme inscrit* au cylindre (*fig.* 257). Si le polygone inscrit au cercle de base est régulier, le prisme inscrit au cylindre est régulier (359).

428. Deux cylindres de révolution sont dits *semblables,* lorsqu'ils sont engendrés par des rectangles semblables, c'est-à-dire lorsque leurs hauteurs sont entre elles comme les rayons de leurs bases.

THÉORÈME.

429. *L'aire latérale d'un cylindre de révolution a pour mesure le produit de la circonférence de sa base par sa hauteur.*

L'aire latérale du cylindre est la limite des aires latérales des prismes réguliers inscrits dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'après cela, soient S, C, H, l'aire latérale, la

circonférence de base et la hauteur du cylindre considéré; soient s et p l'aire latérale et le périmètre de la base d'un prisme régulier inscrit. On a (374)

$$s = p.\mathrm{H}.$$

Lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base du prisme, s tend vers S et p vers C; on a donc, à la limite,

$$\mathrm{S} = \mathrm{C}.\mathrm{H}.$$

Corollaires.

430. Si R est le rayon du cylindre, on a $\mathrm{C} = 2\pi\mathrm{R}$ et, par suite,

$$\mathrm{S} = 2\pi\mathrm{RH}.$$

En ajoutant à cette aire latérale les aires des deux bases ou le double $2\pi\mathrm{R}^2$ de l'aire de l'une d'elles, on obtient, pour l'aire totale T du cylindre,

$$\mathrm{T} = 2\pi\mathrm{RH} + 2\pi\mathrm{R}^2 = 2\pi\mathrm{R}(\mathrm{R}+\mathrm{H}).$$

431. Soient S, S', les aires latérales; T, T', les aires totales; R, R', les rayons et H, H', les hauteurs de deux cylindres de révolution semblables. On aura (428)

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}'} = \frac{\mathrm{R}+\mathrm{H}}{\mathrm{R}'+\mathrm{H}'}$$

et, par suite,

$$\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}'} = \frac{\mathrm{RH}}{\mathrm{R}'\mathrm{H}'} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}.\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}'} = \frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{H}'^2} = \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{R}'^2},$$

$$\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}'} = \frac{\mathrm{R}(\mathrm{R}+\mathrm{H})}{\mathrm{R}'(\mathrm{R}'+\mathrm{H}')} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}.\frac{\mathrm{R}+\mathrm{H}}{\mathrm{R}'+\mathrm{H}'} = \frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{H}'^2} = \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{R}'^2}.$$

Donc, *les aires latérales ou totales de deux cylindres de révolution semblables sont entre elles comme les carrés des rayons ou comme les carrés des hauteurs.*

Scolie.

432. Considérons un cylindre de révolution et un prisme régulier inscrit ABCDEFA'B'C'D'E'F' (*fig.* 257); par une rotation autour de l'arête BB', amenons la face ABB'A' dans le prolongement de la face BCC'B'; puis, par une rotation autour

de CC', amenons les deux faces déjà réunies dans le prolongement de la face suivante CDD'C', et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les faces latérales du prisme soient réunies sur le plan de la dernière d'entre elles AFF'A'. Dans son mouvement autour de l'arête BB', le côté AB reste perpendiculaire à cette arête; il se place donc sur le prolongement de CB; de même,

Fig. 257.

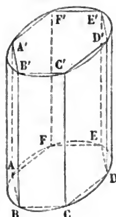
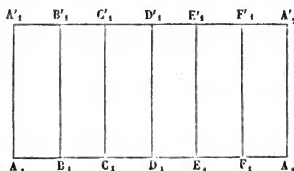


Fig. 258.



la droite ABC, formée alors par la réunion de AB et de BC, vient se placer sur le prolongement de DC, etc. On obtient donc finalement sur le dernier plan un rectangle $A_1A_2A'_2A'_1$ (*fig.* 258) dont la hauteur est celle du prisme droit et dont la base est égale au périmètre de la base du prisme. Ce reotangle est le *développement* de l'aire latérale du prisme.

Si le nombre des côtés du prisme régulier inscrit dans le cylindre croît indéfiniment, le rectangle $A_1A_2A'_2A'_1$ conserve la même hauteur, et la longueur de sa base A_1A_2 tend vers la circonférence de la base du cylindre. Le rectangle limite, qui a une base égale à la circonférence de la base du cylindre, est dit le *développement* de l'aire latérale de ce cylindre.

THÉORÈME.

433. *Le volume d'un cylindre de révolution a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Le volume du cylindre est la limite des volumes des prismes réguliers inscrits, dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'après cela, soient V, B, H, le volume du cylindre, l'aire de sa base et sa hauteur; soient v et b le volume et l'aire de la base d'un prisme régulier inscrit au cylindre; on a (389)

$$v = b.H.$$

Mais lorsque le nombre des faces du prisme croît indéfiniment, v tend vers V et b vers B; on a donc, à la limite,

$$V = B.H.$$

COROLLAIRES.

434. Si R est le rayon du cylindre considéré, on a $B = \pi R^2$, et par suite

$$V = \pi R^2.H.$$

435. Soient V, V′, les volumes; R, R′, les rayons; H, H′, les hauteurs de deux cylindres de révolution semblables; on aura (428)

$$\frac{R}{R'} = \frac{H}{H'}$$

et, par suite,

$$\frac{V}{V'} = \frac{R^2H}{R'^2H'} = \left(\frac{R}{R'}\right)^2 \cdot \frac{H}{H'} = \frac{R^3}{R'^3} = \frac{H^3}{H'^3}.$$

Donc, *les volumes de deux cylindres de révolution semblables sont entre eux comme les cubes des rayons ou comme les cubes des hauteurs.*

436. EXEMPLE :

Pour mesurer les liquides, on emploie des vases ayant la forme de cylindres de révolution dont la hauteur est double du diamètre; calculer d'après cela les dimensions du litre.

La capacité du cylindre dont on demande la hauteur H est 1 décimètre cube; en prenant le décimètre pour unité de longueur, et en remarquant que le rayon du cylindre est $\frac{H}{4}$, on a la relation

$$\pi\left(\frac{H}{4}\right)^2 \cdot H = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{\pi H^3}{16} = 1;$$

on en déduit

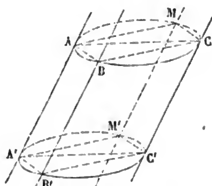
$$H = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}} = 1^{dm},720.$$

Le litre est donc un cylindre dont la hauteur a 172 millimètres, et dont le rayon a par suite 43 millimètres.

SCOLIE.

437. On appelle en général *surface cylindrique* le lieu des positions successives d'une droite AA' assujettie à rencontrer une ligne fixe ABC et à rester parallèle à une direction donnée (*fig.* 259). La ligne fixe, plane ou gauche, ABC, prend le nom de *directrice*, et la droite mobile AA' celui de *génératrice*.

Fig. 259.



Lorsque la directrice est une ligne droite, la surface cylindrique est un plan.

On peut prendre pour directrice d'une surface cylindrique une ligne quelconque tracée sur cette surface, une de ses sections planes par exemple. Si dans cette section ABC on inscrit un polygone ABCM, et si la génératrice glisse sur le contour de ce polygone en restant parallèle à elle-même, elle engendre une *surface prismatique inscrite* dont les arêtes AA', BB', CC', MM', appartiennent à la surface cylindrique. Si l'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés du polygone ABCM, de manière que ces côtés tendent vers zéro, le polygone inscrit a pour limite la courbe directrice, et la surface prismatique correspondante se confond en même temps avec la surface cylindrique.

Il résulte de là que *les sections faites dans une surface cylindrique par deux plans parallèles sont deux courbes égales*, comme limites des deux polygones égaux (370) que les mêmes plans déterminent dans la surface prismatique inscrite.

On nomme *section droite d'une surface cylindrique* la section faite par un plan perpendiculaire aux génératrices.

438. Un *cylindre* est le corps compris entre une surface cylindrique et deux sections planes parallèles. Ces sections sont

les *bases* du cylindre, et la distance de leurs plans parallèles est la *hauteur* de ce corps. Le cylindre est *droit* ou *oblique*, suivant que ses génératrices sont perpendiculaires ou obliques au plan de la base. *Le cylindre droit à base circulaire* n'est autre que le cylindre de révolution étudié dans le § I.

L'aire latérale d'un cylindre quelconque est égale au produit de son arête par le périmètre de sa section droite.

Le volume d'un cylindre quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur.

On arrive à ces théorèmes en considérant le cylindre comme la limite d'un prisme inscrit, lorsque les côtés de la base polygonale tendent vers zéro.

EXERCICES.

1. 1° Quel est le rapport des volumes de deux cylindres dont les aires convexes sont équivalentes? 2° Quel est le rapport des aires convexes de deux cylindres qui ont même volume?

2. Les volumes engendrés par un rectangle tournant successivement autour de ses côtés adjacents sont de a mètres cubes et de b mètres cubes; trouver la longueur de la diagonale de ce rectangle.

3. Calculer à 1 millimètre près la hauteur et le rayon du litre destiné à la mesure des matières sèches.

4. Étant données la hauteur et l'aire totale d'un cylindre de révolution, trouver le rayon de sa base.

5. Diviser l'aire latérale d'un cylindre de révolution, par un plan parallèle aux bases, en deux parties telles que leur moyenne proportionnelle soit égale à la section obtenue.

6. L'eau étant au même niveau dans le réservoir et dans le tuyau d'aspiration d'une pompe aspirante, on fait mouvoir le piston. Trouver à quelle hauteur l'eau parviendra dans le tuyau d'aspiration, après le premier, le second, le troisième,... coup de piston, et combien il faudra de coups de piston pour que l'eau s'élève jusqu'à la soupape d'aspiration. Les données sont : la section du corps de pompe et la course du piston, la section du tuyau d'aspiration et sa longueur.

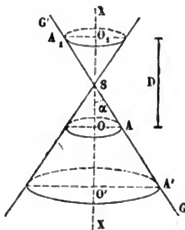
§ II.

Programme officiel : *Cône droit à base circulaire. — Sections parallèles à la base. — Surface latérale du cône, du tronc de cône à bases parallèles. — Volume du cône, du tronc de cône à bases parallèles.*

DÉFINITIONS.

439. On appelle *surface conique de révolution* la surface engendrée par une droite GSG′ tournant autour d'une droite fixe XSX′ qu'elle rencontre en un point S, et à laquelle elle est invariablement liée (*fig.* 260).

Fig. 260.



La droite fixe XX′ reçoit le nom d'*axe* de la surface, et la droite mobile GG′ celui de *génératrice* ou d'*arête*. Le point S, qu'on nomme *sommet*, sépare la surface conique en deux parties indéfinies qu'on appelle *nappes*.

Le lieu géométrique des droites qui, passant par un point donné S, font un angle donné α avec une droite donnée D, est une surface conique de révolution ayant le point S pour sommet et pour axe la parallèle menée à D par le point S.

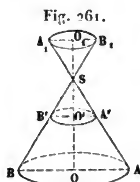
Un point quelconque A de la droite GG′ décrit une circonférence dont le centre est sur l'axe, et dont le plan est perpendiculaire à l'axe (425). Par suite, toutes les sections faites par des plans perpendiculaires à l'axe sont des circonférences dont le lieu des centres est l'axe lui-même. Quant aux rayons OA, O′A′, de ces cercles, la similitude des triangles SOA, SO′A′, prouve qu'ils sont proportionnels aux distances SO, SO′, de

leurs plans au sommet, ou encore aux portions correspondantes SA, SA′, de la génératrice SGG′. Leurs aires sont donc proportionnelles aux carrés des mêmes lignes.

440. On nomme *cône de révolution* le corps engendré par la rotation d'un triangle rectangle SOA autour de l'un des côtés SO de l'angle droit SOA (*fig.* 261).

La surface conique engendrée par l'hypoténuse SA est la *surface latérale* du cône; le cercle décrit par le côté OA est la *base*, la droite SO est la *hauteur*, et l'hypoténuse SA est le *côté* ou l'*apothème* de ce cône.

Fig. 261.



441. Si l'on coupe une surface conique de révolution (*fig.* 261) par deux plans AB, A′B′, perpendiculaires à l'axe et situés d'un même côté du sommet S, on obtient un volume terminé par une portion de la surface conique et par les deux cercles AB, A′B′. Ce corps, que l'on nomme *tronc de cône de révolution à bases parallèles*, est la différence des deux cônes SAB, SA′B′. On peut encore le considérer comme engendré par la rotation du trapèze rectangle AOO′A′ autour du côté OO′. La droite OO′ est la *hauteur* du tronc; les cercles AB, A′B′, en sont les bases, et AA′ en est le *côté* ou l'*apothème*.

En coupant une surface conique de révolution par deux plans AB, A_1B_1, perpendiculaires à l'axe, mais situés de part et d'autre du sommet S (*fig.* 261), on obtient un corps qui est la somme des deux cônes SAB, SA_1B_1. Il convient de donner encore à ce corps le nom de tronc de cône; mais, pour le distinguer du tronc de cône proprement dit, que nous avons défini dans l'alinéa précédent, nous l'appellerons *tronc de cône de seconde espèce* (412).

442. En construisant une pyramide de même sommet que le cône, et ayant pour base un polygone inscrit au cercle de

18.

base du cône, on obtient une pyramide inscrite au cône (*fig.* 262). Si le polygone de base est régulier, la pyramide inscrite est régulière.

443. Deux cônes de révolution sont dits *semblables* lorsqu'ils sont engendrés par des triangles rectangles semblables, c'est-à-dire lorsque leurs hauteurs sont entre elles comme les rayons des bases.

THÉORÈME.

444. *L'aire latérale d'un cône de révolution a pour mesure le produit de la circonférence de sa base par la moitié de son apothème.*

L'aire latérale du cône est la limite des aires latérales des pyramides régulières inscrites dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'après cela, soient S, C, A, l'aire latérale, la circonférence de base et l'apothème du cône considéré, et s, p, a, l'aire latérale, le périmètre de la base et l'apothème d'une pyramide régulière inscrite. On a (402)

$$s = p \times \frac{1}{2} a.$$

Lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base de la pyramide, s tend vers S, p vers C, a vers A; on a donc, à la limite,

$$S = C . \frac{1}{2} A.$$

COROLLAIRES.

445. Si R est le rayon de la base du cône, on a $C = 2\pi R$, et par suite

$$S = \pi RA.$$

En ajoutant la base πR^2, on a, pour l'aire totale,

$$T = \pi RA + \pi R^2 = \pi R(A + R).$$

En raisonnant comme au nº 431, on reconnaît que *les aires latérales ou totales de deux cônes de révolution semblables sont entre elles comme les carrés des rayons ou des apothèmes ou des hauteurs.*

446. Considérons un cône de révolution et une pyramide régulière inscrite SABCDEF (*fig.* 262); par une rotation autour

de l'arête SB, amenons la face SAB dans le prolongement de la face SBC ; puis, par une rotation autour de SC, amenons les deux faces déjà réunies dans la prolongement de la face sui-

Fig. 262.

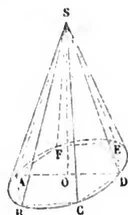
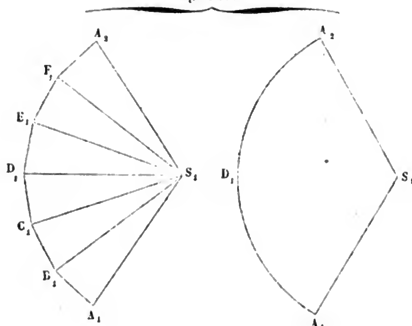


Fig. 263.



vante SCD; et ainsi de suite, jusqu'à ce que toutes les faces latérales de la pyramide soient réunies dans le plan de la dernière d'entre elles SFA. On obtiendra ainsi un secteur polygonal régulier $S_1A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2$ (*fig.* 263) ayant pour rayon l'arête de la pyramide régulière, c'est-à-dire l'apothème du cône, et pour base une ligne brisée régulière $A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2$ égale au périmètre de la base de la pyramide.

Si le nombre des côtés de la base de la pyramide régulière inscrite dans le cône croît indéfiniment, le secteur $S_1A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2$ conserve le même rayon, et sa base dégénère en un arc de cercle, ayant une longueur égale à celle de la circonférence du cône. Le secteur circulaire $S_1A_1A_2$ obtenu est dit le *développement* de l'aire latérale du cône. Il est aisé de calculer le nombre n de degrés contenus dans l'angle $A_1S_1A_2$ de ce secteur circulaire. A étant l'apothème du cône et R le rayon de sa base, on a

$$\frac{n}{360} = \frac{\text{arc } A_1A_2}{2\pi.S_1A_1} = \frac{2\pi R}{2\pi A}, \quad \text{d'où} \quad n = 360^\circ \frac{R}{A}.$$

447. Pour $A = 2R$, on a $n = 180^\circ$, de sorte que le développement est un demi-cercle. Le cône correspondant est dit

équilatéral; sa section par un plan passant par l'axe est un triangle équilatéral.

THÉORÈME.

448. *L'aire latérale d'un tronc de cône de révolution à bases parallèles a pour mesure le produit de la demi-somme des circonférences de base par son apothème.*

L'aire latérale du tronc de cône ADD'A' (*fig.* 264) est la différence des aires latérales des cônes SAD, SA'D'. Cela posé, inscrivons dans le cône SAD une pyramide régulière SABCDEF; le plan A'D' de la base supérieure du tronc de cône décomposera cette pyramide en deux parties qui seront : l'une, SA'B'C'D'E'F', une pyramide régulière inscrite dans le cône SA'D'; l'autre, ABCDEFA'B'C'D'E'F', un tronc de pyramide régulier inscrit dans le tronc de cône ADD'A'. Or, les aires latérales des cônes SAD, SA'D', étant les limites des aires latérales des pyramides SABCDEF, SA'B'C'D'E'F', lorsque le nombre commun de leurs faces croît indéfiniment, l'aire latérale du tronc de cône sera égale à la limite de l'aire latérale du tronc de pyramide régulier inscrit. Soient s, a, p, p', l'aire latérale, l'apothème et les périmètres des bases du tronc de pyramide; soient de même S, A, C, C', l'aire latérale, l'apothème et les circonférences des bases du tronc de cône; on aura (403)

$$s = \frac{1}{2}(p + p').a.$$

Mais, à la limite, lorsque les côtés du polygone ABCDEF tendent vers zéro, s tend vers S, p vers C, p' vers C', a vers A, et l'on a

$$S = \frac{1}{2}(C + C').A.$$

Corollaires.

449. Si R et R' sont les rayons des bases du tronc, on a $C = 2\pi R$, $C' = 2\pi R'$, et par suite

$$S = \pi(R + R').A.$$

450. Par le milieu A_1 du côté AA' (*fig.* 265), menons un plan parallèle aux bases du tronc de cône; le rayon A_1O_1 de la section circulaire déterminée par ce plan est parallèle (301)

aux rayons AO, A'O', des bases, et par suite (260) égal à la demi-somme de ces rayons. Donc la circonférence A_1D_1 est la

Fig. 264.

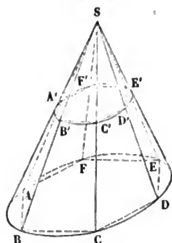
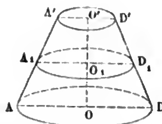


Fig. 265.



moyenne arithmétique des circonférences de base, et l'on peut dire que *l'aire latérale d'un tronc de cône de révolution a pour mesure le produit de l'apothème par la circonférence équidistante des deux bases.*

Ce dernier énoncé s'applique aussi au cylindre et au cône, car la circonférence équidistante des bases est égale, dans le cylindre, à celle de la base, et, dans le cône, à la moitié de celle de la base.

THÉORÈME.

451. *Le volume d'un cône de révolution a pour mesure le produit de sa base par le tiers de sa hauteur.*

Le volume du cône est la limite des volumes des pyramides régulières inscrites dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'après cela, soient V, B, H, le volume du cône, l'aire de sa base et sa hauteur; soient v et b le volume et l'aire de la base d'une pyramide régulière inscrite dans ce cône. On a (405)

$$v = \frac{1}{3} b\text{H}.$$

Mais lorsque le nombre des faces de la pyramide croît indéfiniment, v tend vers V et b vers B; on a donc, à la limite,

$$\text{V} = \frac{1}{3}\text{BH}.$$

Corollaire.

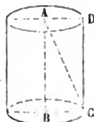
452. Si R est le rayon de la base du cône, on a $B = \pi R^2$, et par suite

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

On voit, comme au nº 435, que *les volumes de deux cônes de révolution semblables sont dans le rapport des cubes des hauteurs ou des rayons des bases.*

453. Lorsqu'un rectangle ABCD tourne autour de l'un de ses côtés AB (*fig.* 266), le triangle ABC engendre un cône

Fig. 266.



dont le volume est le tiers (434, 452) de celui du cylindre engendré par le rectangle ABCD. Par suite, le volume engendré en même temps par le triangle ADC est les deux tiers du même cylindre. Cette remarque nous sera utile plus tard.

THÉORÈME.

454. *Le volume d'un tronc de cône de révolution à bases parallèles est égal à la somme des volumes de trois cônes ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc, et pour bases, le premier la base inférieure, le second la base supérieure, et le troisième la moyenne proportionnelle entre les deux bases du tronc.*

Considérons, comme au nº 448, un tronc de pyramide régulier inscrit dans le tronc de cône. Les volumes des deux pyramides dont ce tronc de pyramide est la différence ayant respectivement pour limites les volumes des deux cônes dont le tronc de cône proposé est la différence, on aura le volume de ce tronc de cône en prenant la limite du volume du tronc de pyramide. D'après cela, soient V, b, B, H, le volume, les bases et la hauteur du tronc de cône, v, b_1, B_1, le volume et les bases

du tronc de pyramide inscrit; on aura (410)

$$v = \frac{H}{3}(B_1 + b_1 + \sqrt{B_1 b_1}).$$

Mais, lorsque le nombre des faces du tronc de pyramide croît indéfiniment, v tend vers V, b_1 vers b, B_1 vers B; et l'on a, à la limite, la formule

$$V = \frac{H}{3}(B + b + \sqrt{Bb}),$$

dont l'énoncé ci-dessus n'est que la traduction en langage ordinaire.

Corollaires.

455. Si R est le rayon de la base inférieure B, et r le rayon de la base supérieure b, on a $B = \pi R^2$, $b = \pi r^2$, et par suite

$$(1) \qquad V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

456. Le raisonnement qui précède s'applique au tronc de *seconde espèce;* il faut seulement substituer le mot *somme* au mot *différence*, et remarquer que le tronc de pyramide inscrit correspondant étant de seconde espèce, le radical qui figure dans l'expression de v doit avoir le signe — (412). On obtient ainsi pour le volume du tronc de cône de seconde espèce la formule

$$V = \frac{H}{3}(B + b - \sqrt{Bb}) = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 - Rr).$$

457. Parfois dans la pratique, notamment pour le *cubage des troncs d'arbres* non équarris, les bases diffèrent assez peu pour qu'on puisse assimiler sans inconvénient le cône tronqué à un cylindre ayant pour hauteur la hauteur du tronc et pour base la section faite dans le tronc à égale distance des deux bases.

Il convient dans ce cas de préparer la formule du volume du cylindre de la manière suivante : soit C la longueur de la circonférence moyenne que l'on évalue au moyen d'un cordon métrique; le rayon de cette circonférence sera $\frac{C}{2\pi}$ et, par suite,

le volume cherché

$$v = \frac{\pi \text{HC}^2}{4\pi^2} = \frac{\text{HC}^2}{4\pi}.$$

Ainsi, supposons qu'on ait trouvé $1^{\text{m}},80$ pour la circonférence moyenne et $6^{\text{m}},50$ pour la hauteur du tronc d'arbre, on aura pour le volume

$$\frac{6,5.(1,8)^2}{4\pi} = \frac{6,5.(0,9)^2}{\pi} = 1^{\text{mc}},676.$$

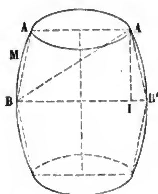
458. La question du *jaugeage des tonneaux* se rattache à la mesure du tronc de cône.

En considérant le tonneau comme la somme de deux troncs de cône identiques opposés par leur grande base (*fig.* 267), on aurait la formule

$$\text{V} = \frac{1}{3}\pi\text{H}(\text{R}^2 + r^2 + \text{R}r),$$

dans laquelle H est la hauteur totale du double tronc, r le rayon du *fond* AA′, et R le rayon de la grande base BB′ à laquelle on donne le nom de *bouge*. Mais cette formule conduit à

Fig. 267.



un résultat trop faible, car on néglige le double du volume engendré par la rotation du segment AMB compris entre la droite AB et l'arc AMB. En remplaçant dans la parenthèse Rr par R^2, on obtient une formule

$$\text{V} = \frac{1}{3}\pi\text{H}(2\text{R}^2 + r^2)$$

qui donne, au contraire, un résultat trop fort. La formule qui s'adapte le mieux à la forme générale des tonneaux est la sui-

vante (*) :

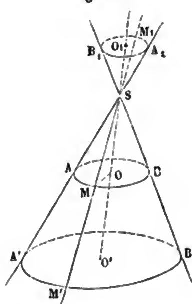
$$V = \frac{1}{3}\pi H \left[2R^2 + r^2 - \frac{1}{3}(R^2 - r^2)\right].$$

Pour $H = 0^m,756$, $R = 0^m,345$, $r = 0^m,305$, la première formule donne 250 litres, la seconde 261 et la troisième 254.

Scolie.

459. On appelle en général *surface conique* le lieu des positions successives d'une droite A_1SA (*fig.* 268) assujettie à pas-

Fig. 268.



ser par un point fixe S et à rencontrer une ligne fixe AMB, plane ou gauche. La droite mobile A_1SA reçoit le nom de *génératrice*, la ligne fixe AMB celui de *directrice*, et le point fixe S celui de *sommet*. Une surface conique est formée de deux nappes SA_1B_1, SAB, séparées par le sommet.

Lorsque la directrice est une ligne droite, la surface conique est un plan.

On peut prendre pour directrice d'une surface conique une ligne quelconque tracée sur la surface, une de ses sections planes, par exemple. Si, dans cette section, on inscrit un polygone, et que la génératrice glisse sur ce polygone, en passant toujours par le sommet, elle engendre une surface pyramidale inscrite qui se confond à la limite avec la surface conique, lorsque les côtés du polygone inscrit correspondant tendent vers zéro.

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XLVIII, p. 96.

Il résulte de là que *les sections faites dans une surface conique par deux plans parallèles sont deux courbes semblables*, comme limites des deux polygones semblables (397) que les mêmes plans déterminent dans la surface pyramidale inscrite.

Une surface cylindrique peut être considérée comme la limite d'une surface conique dont le sommet s'est éloigné indéfiniment dans une direction donnée.

460. Un *cône* est le corps compris sous une surface conique limitée d'une part à son sommet et de l'autre à une section plane, qui prend le nom de *base;* la hauteur du cône est la distance du sommet au plan de la base. Un cône à *base circulaire* est *droit* ou *oblique*, suivant que la projection orthogonale du sommet sur le plan de la base coïncide ou non avec le centre du cercle. Le cône circulaire droit n'est autre que le cône de révolution étudié au § II.

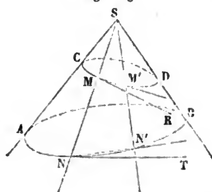
Le volume d'un cône quelconque est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.

On arrive à ce théorème en considérant le cône comme la limite d'une pyramide inscrite, lorsque les côtés de la base polygonale tendent vers zéro.

461. *Dans un cône ou dans un cylindre, le plan* SNT, *déterminé par une génératrice* SN *et par la tangente* NT *menée à une courbe* ANB *située sur la surface, au point* N *où cette courbe rencontre la génératrice, est le même, quelle que soit la courbe considérée* (*fig.* 269).

Il suffit de prendre une seconde courbe CMD sur la surface, coupant la génératrice SN au point M, et de prouver que le

Fig. 269.



plan SNT renferme la tangente MR menée par le point M à cette courbe. Or, le plan NSN', mené par la génératrice SMN et

une génératrice voisine SM′N′, a pour limite le plan SNT, puisque la corde NN′ tend vers la tangente NT. D'ailleurs, quand N′ vient en N, M′ vient en M, et les sécantes NN′, MM′, deviennent en même temps les tangentes NT et MR; comme les sécantes MM′, NN′, sont sans cesse contenues dans le plan SNN′, on voit que le plan SNT renferme la tangente MR.

Ce plan SNT est dit le *plan tangent au cône ou au cylindre suivant la génératrice* SN.

Dans le cône ou le cylindre de révolution, le plan tangent suivant une génératrice est perpendiculaire au plan déterminé par cette génératrice et par l'axe; car le plan tangent contient la tangente à une section droite de la surface, et cette tangente est à angle droit sur la génératrice et sur l'axe.

EXERCICES.

1. Evaluer l'erreur commise en opérant, pour le cubage des troncs d'arbres, comme il est indiqué au n° 457.

2. Calculer l'aire convexe, l'aire totale et le volume d'un cône équilatéral en fonction de son côté. — Pour quelles valeurs de ce côté l'aire totale du cône est-elle un mètre carré, et son volume un mètre cube?

3. Partager l'aire latérale d'un cône de révolution en n parties équivalentes par des plans parallèles à sa base.

4. Le volume d'un tronc de cône de révolution étant $41^{mc},328$, sa hauteur $1^{m},817$, le rayon d'une de ses bases $2^{m},698$, on demande de calculer à $0^{m},001$ près le rayon de sa seconde base.

5. Calculer à 0,001 près le rapport que doivent présenter les rayons des bases d'un tronc de cône de révolution, pour que son volume soit la moitié de celui du cylindre de même hauteur élevé sur la base inférieure du tronc.

6. Quel est le rapport des volumes engendrés par un parallélogramme tournant successivement autour de ses deux côtés adjacents?

7. Soit B′C′ la projection du diamètre BC d'un cercle OA sur la tangente TT′ au point A; chercher pour quelle position de BC le rapport du cercle OA à l'aire totale du tronc de cône engendré par la rotation du trapèze BCB′C′ autour de TT′ est égal à m; discussion.

8. Un tronc de cône de révolution d'une substance dont le poids spécifique est d, est plongé verticalement dans un liquide dont le poids spécifique est d'; les rayons de ses bases sont R et r, sa hauteur est h. On demande de calculer la hauteur de la partie immergée et le rayon de la section déterminée dans le tronc de cône par la surface de niveau du liquide.

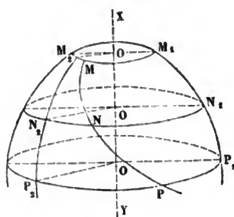
§ III.

Programme officiel : *Sphère. — Sections planes; grands cercles, petits cercles. — Pôles d'un cercle. — Étant donnée une sphère, trouver son rayon par une construction plane. — Plan tangent à la sphère.*

DÉFINITIONS.

462. Une *surface de révolution* est le lieu des positions successives d'une ligne MNP qui tourne autour d'une droite fixe XY à laquelle elle est invariablement liée (*fig.* 270). Dans

Fig. 270.



ce mouvement, tout point M de la génératrice MNP décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe XY, et dont le centre O est sur cet axe; d'après cela, toutes les sections faites par des plans perpendiculaires à l'axe sont des cercles : ces cercles M_1MM_2, N_1NN_2, $P_1PP_2, \ldots$, sont les *parallèles* de la surface. On appelle *méridiennes* les sections faites dans la surface par des plans passant par l'axe XY; deux méridiennes quelconques $M_1N_1P_1$, $M_2N_2P_2$, sont des lignes superposables; car, si l'on fait tourner le plan XOP_1 de l'angle P_1OP_2 de manière à amener le point P_1 sur le point P_2, les points M_1, $N_1, \ldots$, arriveront respectivement sur M_2, $N_2, \ldots$, attendu que les angles M_1OM_2, N_1ON_2, $P_1OP_2, \ldots$ sont égaux comme angles plans d'un même dièdre.

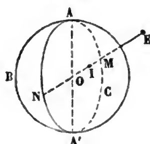
Toute courbe tracée sur une surface de révolution peut être prise pour génératrice de cette surface; le plus souvent, on choisit pour génératrice la courbe méridienne.

Les surfaces de révolution admettent un second mode de génération fort remarquable : on peut les considérer comme le lieu des positions d'un cercle dont le centre parcourt l'axe fixe XY, dont le plan reste perpendiculaire à cet axe, et dont le rayon varie suivant une loi telle, que le cercle rencontre sans cesse une méridienne ou toute autre courbe tracée sur la surface. C'est ce cercle variable de grandeur et de position qui est alors la *génératrice*, et la méridienne ou la courbe fixe considérée sur la surface qui est la *directrice*.

Nous avons déjà étudié deux surfaces de révolution : la surface conique de révolution, dont le méridien est une droite qui rencontre l'axe; la surface cylindrique de révolution, dont le méridien est une droite parallèle à l'axe. Nous allons maintenant en étudier une troisième : la *surface sphérique*.

463. On appelle *surface sphérique* la surface engendrée par la rotation d'une demi-circonférence ABA' autour du diamètre AA' qui la termine (*fig.* 271).

Fig. 271.



Dans ce mouvement, tout point de cette demi-circonférence décrit un cercle dont le centre est situé sur l'axe de rotation AA' et dont le plan est perpendiculaire à cet axe.

La *sphère* est le corps limité par une surface sphérique. On confond souvent dans le discours les mots *sphère* et *surface sphérique*, de même qu'en Géométrie plane on dit parfois *cercle* pour *circonférence de cercle*.

464. Considérons la sphère engendrée par la rotation du demi-cercle ABA' autour du diamètre AA', et un point quelconque de l'espace. Quand le demi-cercle générateur vient se placer suivant ACA' dans le plan déterminé par AA' et par le point considéré, il peut se faire que ce point soit comme E à l'extérieur du cercle ACA', ou comme I à l'intérieur, ou enfin

comme M sur la circonférence de ce cercle. Dans le premier cas, le point E est *extérieur* à la sphère et sa distance au centre O du cercle ACA' est plus grande que le rayon R de ce cercle; dans le second cas, le point I est *intérieur* à la sphère et la distance OI est moindre que R; enfin, dans le troisième cas, le point M est sur la surface sphérique et la distance OM est égale à R.

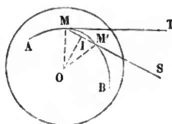
La *surface sphérique* peut donc être encore définie le *lieu géométrique des points équidistants d'un point fixe.*

Ce point fixe O est dit le *centre* de la sphère. On nomme *rayon* toute droite, telle que OA ou OM, menée du centre O à la surface; *tous les rayons d'une même sphère sont égaux.* On nomme diamètre toute droite, telle que MN, passant par le centre et limitée à la surface sphérique; *tous les diamètres d'une même sphère sont égaux,* car chacun d'eux est la somme de deux rayons.

Deux sphères de même rayon sont égales.

465. La définition donnée au n° 107 pour la tangente aux courbes planes, s'étend aux courbes de l'espace. Il est aisé de voir, d'après cela, que *la tangente* MT *à une courbe quelconque* AMB *tracée sur la sphère est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* OM *mené au point de contact.* En effet (*fig.* 272),

Fig. 272.



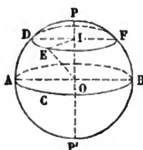
prenons sur la courbe AMB un point M' voisin du point M, menons la sécante MM'S et joignons le centre O au milieu I de la corde MM'. Le triangle MOM' étant isocèle, la droite OI est perpendiculaire sur MM' (37). Or, lorsque la sécante MM'S tourne autour du point M de manière à devenir à la limite la tangente MT, le point I milieu de MM' se réunit au point M en même temps que le point M'. L'angle OMT, position limite de l'angle droit OIS, est donc lui-même un angle droit.

THÉORÈME.

466. *Toute section plane de la sphère est un cercle.*

En effet, les points de la section sont, puisqu'ils appartiennent à la sphère, situés à la même distance du centre de cette sphère ; or, on sait (88, 324) que le lieu des points d'un plan équidistants d'un point fixe est une circonférence de cercle.

Fig. 273.



COROLLAIRES.

467. Si le point fixe O, qui est ici le centre de la sphère (*fig.* 273), est situé dans le plan sécant, ce point est le centre même de la section ACB dont le rayon ne diffère pas de celui de la sphère.

Si le point fixe O est extérieur au plan sécant, le centre I de la section DEF est la projection du centre O de la sphère sur le plan sécant (324). Quant au rayon IE $= r$ de la section, c'est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle OIE dont l'hypoténuse OE est le rayon R de la sphère et dont l'autre côté de l'angle droit OI est la distance d du centre de la sphère au plan sécant. Ce rayon r résulte donc de la formule

$$r^2 = R^2 - d^2.$$

On est ainsi conduit à diviser les sections planes de la sphère en deux classes : les *grands cercles*, dont les plans passent par le centre de la sphère et qui sont tous égaux entre eux, puisqu'ils ont tous pour rayon le rayon de la sphère ; et les *petits cercles*, dont les plans ne contiennent pas le centre de la sphère, et dont les rayons, inférieurs à celui de la sphère, décroissent à mesure que leurs plans s'éloignent du centre de la sphère. *Deux petits cercles également éloignés du centre de la sphère sont égaux, et, de deux petits cercles inégale-*

ment éloignés du centre de la sphère, le plus grand est celui qui est le plus voisin de ce centre.

Ajoutons qu'il faut *trois points* de la surface sphérique pour déterminer un petit cercle (109, 282), tandis que *deux points* suffisent pour déterminer un grand cercle, attendu que le centre est connu; toutefois, dans ce dernier cas, les deux points donnés ne doivent pas être en ligne droite avec le centre de la sphère, sans quoi le plan du grand cercle, assujetti seulement à passer par un diamètre, pourrait occuper une infinité de positions.

468. *Tout grand cercle divise la surface sphérique et la sphère en deux parties égales.* Car si, après avoir séparé les deux parties, on les applique sur la base commune en tournant leur convexité dans le même sens, les deux surfaces coïncideront, sans quoi tous les points de la surface sphérique ne seraient pas à la même distance du centre.

469. *Deux grands cercles* APBP′, ABC (*fig.* 274), *se divisent mutuellement en deux parties égales;* car le centre O de la sphère, appartenant à la fois aux plans de ces deux cercles, est situé sur leur intersection commune, qui dès lors est un diamètre.

470. *Une droite ne peut couper la surface sphérique en plus de deux points.* Car cette droite ne saurait avoir plus de deux points communs avec la circonférence de grand cercle, située dans le plan déterminé par cette droite et le centre de la sphère.

471. *La sphère est de révolution autour d'un diamètre quelconque* AB. Car la circonférence ACB déterminée par un plan quelconque passant par AB, ayant même centre O et même rayon OA que la sphère, engendrera évidemment cette surface en tournant autour de AB (*fig.* 274).

472. On nomme *pôles* d'un cercle de la sphère les extrémités du diamètre de la sphère qui est perpendiculaire au plan du cercle.

Deux cercles DFE, ACB (*fig.* 275), dont les plans sont parallèles, ont les mêmes pôles P et P′.

Le centre I d'un cercle quelconque DE, ses pôles P et P′, et

le centre O de la sphère sont sur une même perpendiculaire au plan de ce cercle.

Tout grand cercle PFCP′ passant par les pôles P et P′ d'un cercle DFE a son plan perpendiculaire au plan de ce cercle, puisqu'il contient la droite PP′ qui est perpendiculaire à ce dernier plan (344).

Fig. 274.

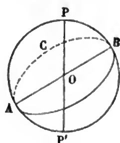
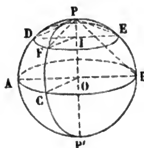


Fig. 275.



THÉORÈME.

473. *Tous les points de la circonférence d'un cercle* DFE *de la sphère sont à égale distance de chacun des pôles* P *et* P′ *de ce cercle* (*fig.* 275).

En effet, la droite PI, qui joint le pôle P au centre I du cercle DFE, étant perpendiculaire au plan DFE, les droites PD, PF, PE,..., sont des obliques qui s'écartent également du pied I de la perpendiculaire, et qui par suite sont égales.

On voit encore que les arcs de grand cercle PD, PF, PE,..., sont égaux comme sous-tendus par des cordes égales.

Enfin, dans le cas où le cercle considéré DFE devient un grand cercle ACB, la même propriété subsiste; mais les angles droits POA, POC, POB,..., ayant leurs sommets au centre des grands cercles PAP′, PCP′, PBP′,..., les arcs PA, PC, PB,..., sont tous égaux au quart d'une circonférence de grand cercle.

SCOLIES.

474. Des deux pôles P et P′ d'un petit cercle DFE, nous ne considérerons désormais, à moins d'avertissement contraire, que le pôle P qui est le plus rapproché du plan de ce cercle. Nous donnerons à la distance rectiligne PD, qui sépare le pôle P d'un point quelconque D du cercle DFE, le nom de *distance polaire* de ce cercle, et à la longueur de l'arc de grand cercle PD, qui va du pôle à un point quelconque D du cercle DFE, le nom de *rayon sphérique* de ce cercle.

Le rayon sphérique d'un grand cercle est égal au quart de la circonférence de ce cercle ou à un quadrant, et sa distance polaire est égale à la corde de cet arc, c'est-à-dire au côté du carré inscrit dans un grand cercle.

475. Le théorème précédent permet de tracer des circonférences sur une sphère solide comme on les trace sur un plan. On emploie à cet effet un *compas à branches courbes,* afin de ne pas être gêné par la convexité de la sphère. On donne au compas une ouverture (distance des deux pointes) égale à la distance polaire voulue, et on place la pointe sèche au point choisi pour pôle; l'autre pointe décrit alors le cercle demandé.

Pour décrire un grand cercle, il faut avoir sa distance polaire, c'est-à-dire la corde d'un arc égal au quart d'un grand cercle; ce qui exige la connaissance du rayon de la sphère (485).

THÉORÈME.

476. *Tout plan* ACB *perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon* OC *est tangent à la sphère, et* réciproquement *tout plan* ACB *tangent à la sphère est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* OC *mené au point de contact* C (*fig.* 276).

On dit qu'un plan ACB est *tangent* à la sphère lorsqu'il n'a avec cette surface qu'un point commun C, qu'on nomme *point de contact.*

Cela posé, soit ACB un plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon OC. D étant un point quelconque de ce plan, autre que C, OD sera oblique à ce plan et l'on aura $OD > OC$, de sorte que le point D sera extérieur à la sphère. Le plan ACB, n'ayant d'après cela que le point C commun avec la surface sphérique, sera tangent à cette surface.

Inversement, si ACB est un plan tangent à la sphère au point C, tout point D de ce plan, autre que C, sera extérieur à la sphère, et l'on aura $OD > OC$; donc OC étant la plus courte distance du centre O au plan ACB, sera perpendiculaire sur ce plan.

Corollaires.

477. *Par un point pris sur la surface sphérique, on peut toujours mener un plan tangent à cette surface, et l'on ne peut en mener qu'un* (317).

478. Le plan tangent à la sphère en un point C contient les tangentes en ce point à toutes les courbes qu'on peut tracer par ce point sur la surface sphérique (465, 319).

Fig. 276.

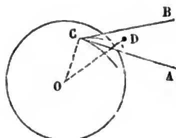
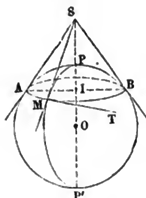


Fig. 277.



479. Considérons une sphère O et un point extérieur S (*fig.* 277). Par la droite OS, menons un plan quelconque qui déterminera dans la sphère un grand cercle PAP′, et menons par S une tangente SA à ce cercle. Pendant que le demi-cercle PAP′ en tournant autour de l'axe SO engendre la sphère, la tangente SA engendre un cône de révolution qui a en commun avec la sphère le cercle AB décrit par le point A. De plus, en tout point M de ce cercle, le cône et la sphère ont le même plan tangent; car la génératrice SM et la tangente MT au cercle AB, qui déterminent le plan tangent au cône (461), sont situées l'une et l'autre (478) dans le plan tangent à la sphère. On dit d'après cela que *le cône est circonscrit à la sphère* et que *la sphère est inscrite au cône* le long du cercle commun AB.

On voit encore par là que *par un point extérieur* S, *on peut mener une infinité de plans tangents à une sphère* O, et que *toutes les tangentes* SA, SM, SB,..., *à la sphère, issues du même point* S, *sont égales.*

Si le point S s'éloigne indéfiniment sur la droite PP′, le cône dégénère en un *cylindre circonscrit,* et le lieu des points de contact de la sphère et de ce cylindre de révolution devient le grand cercle perpendiculaire à la direction PP′ des génératrices du cylindre.

THÉORÈME.

480. *L'intersection de deux sphères* A *et* B *est une circonférence de cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne des*

centres AB *des deux sphères et dont le centre est sur cette ligne* (*fig.* 278).

Car cette intersection n'est autre que la circonférence engendrée par la rotation autour de AB du point C commun aux deux circonférences suivant lesquelles les deux sphères sont coupées par un plan quelconque passant par AB.

SCOLIE.

481. Lorsque deux sphères n'ont qu'un point commun, on dit qu'elles sont tangentes en ce point qu'on nomme *point de contact;* le point de contact est situé sur la ligne des centres, et en ce point les sphères ont le même plan tangent.

Les positions relatives de deux sphères sont au nombre de cinq (**114**), et les relations correspondantes entre la distance des centres et les rayons sont celles qui ont lieu pour les circonférences de grand cercle déterminées dans les sphères données par un plan quelconque passant par la droite des centres.

Fig. 278.

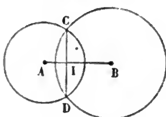
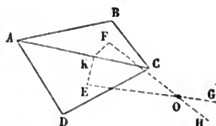


Fig. 279.



THÉORÈME.

482. *Par quatre points* A, B, C, D, *non situés dans un même plan, on peut faire passer une surface sphérique, mais une seule* (*fig.* 279).

Il s'agit de prouver qu'il existe un point, et un seul, situé à la même distance des quatre points A, B, C, D.

Or, tout point équidistant de A, B, C, D, doit se trouver sur la perpendiculaire FH élevée au plan ABC par le centre F du cercle circonscrit au triangle ABC, puisque cette perpendiculaire est le lieu des points équidistants de A, B, C (**324**); il doit aussi appartenir à la perpendiculaire EG élevée au plan ACD par le centre E du cercle circonscrit au triangle ACD. Comme deux droites FH, EG, ne peuvent avoir qu'un point commun, on voit d'abord qu'il ne saurait jamais exister qu'un seul point équidistant de A, B, C, D. En second lieu, un tel

point existe toujours si, conformément à l'hypothèse, les points A, B, C, D, ne sont pas situés dans un même plan. En effet, le plan perpendiculaire sur le milieu K de AC étant le lieu des points équidistants de A et de C, doit contenir EG et FH ; d'ailleurs, les deux droites KF et KE, suivant lesquelles il rencontre les plans ABC et ADC, se coupent, puisque les plans ABC et ADC sont distincts; donc les deux droites EG et FH, étant situées dans un même plan EKF, et étant, dans ce plan, perpendiculaires à deux droites KF et KE qui se coupent, ont un point commun O qui est le centre de la sphère demandée.

COROLLAIRES.

483. Deux sphères, qui ont quatre points communs non situés dans un même plan, coïncident.

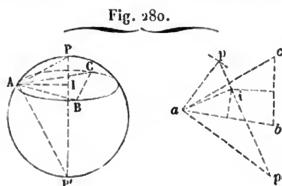
484. Les perpendiculaires élevées aux quatre faces d'un tétraèdre par le centre du cercle circonscrit à chacune de ces faces, se coupent en un même point.

PROBLÈME.

485. *Trouver le rayon d'une sphère solide* (*fig.* 280).

Il existe plusieurs solutions de ce problème ; voici la meilleure.

Fig. 280.



D'un point P de la surface sphérique comme pôle, avec une ouverture de compas arbitraire, on décrit un cercle ABC. On relève avec le compas les trois distances rectilignes AB, BC, CA, et l'on construit sur le papier un triangle *abc* ayant pour côtés ces trois longueurs. On détermine le centre *i* du cercle circonscrit au triangle *abc*, et la droite *ai* est égale au rayon AI du cercle ABC. Dès lors, si du point *a* comme centre, avec une ouverture de compas égale à celle qui a servi à décrire le cercle ABC sur la sphère, on décrit un petit arc de cercle jus-

qu'à la rencontre p de la perpendiculaire pip' élevée en i sur ai, on forme un triangle api égal à API, et il ne reste plus qu'à élever la perpendiculaire ap' sur ap pour avoir en pp' le diamètre PP' de la sphère.

Pour obtenir des résultats précis lorsqu'on n'a à sa disposition qu'une portion de sphère, il faut : choisir le point P à peu près au milieu de la portion de surface dont on dispose, prendre une distance polaire PA aussi grande que possible, et enfin, dans tous les cas, choisir les points A, B, C, sur le cercle ABC, de telle sorte que le triangle ABC soit à peu près équilatéral.

EXERCICES.

1. Par une droite donnée mener un plan tangent à une sphère donnée.

2. Par une droite donnée, mener à une sphère donnée un plan sécant qui détermine une section de rayon donné.

3. Lorsque trois sphères se coupent deux à deux, les plans des trois cercles d'intersection se coupent suivant une même droite perpendiculaire au plan déterminé par les centres des trois sphères.

4. Trouver le lieu des centres des sections faites dans une sphère donnée par tous les plans sécants qui passent par une droite donnée ou par un point donné.

5. Trouver la plus courte et la plus grande distance d'un point donné à une surface sphérique. — Trouver le lieu des points qui sont à une distance donnée d'une sphère donnée.

6. Trouver la plus courte distance d'une droite donnée ou d'un plan donné à une surface sphérique.

7. La somme des carrés des cordes interceptées par une sphère donnée sur trois droites rectangulaires partant d'un point donné est constante, ainsi que la somme des carrés des six segments déterminés sur ces trois cordes par le point donné.

8. Trouver le lieu des points de l'espace dont le rapport des distances à deux points fixes est constant. — Trouver le lieu des points de l'espace également éclairés par deux points lumineux.

9. Trouver le lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux points donnés est constante. — Trois points étant donnés, trouver le lieu des points dont la somme des carrés des distances est à la fois constante par rapport au premier et au second point, par rapport au premier et au troisième.

10. Trouver le lieu des points d'où l'on voit une sphère donnée, deux sphères données ou trois sphères données, sous un angle donné.

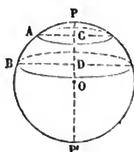
§ IV.

Programme officiel : *Mesure de la surface engendrée par une ligne brisée régulière, tournant autour d'un axe mené dans son plan et par son centre. — Aire de la zone, de la sphère entière.*

DÉFINITIONS.

486. On appelle *zone* la portion de la surface sphérique comprise entre deux cercles dont les plans sont parallèles. Ces cercles sont les *bases* de la zone, et la distance de leurs plans est sa *hauteur*. Ainsi, tandis que la demi-circonférence PABP′ engendre une sphère en tournant autour du diamètre PP′ (*fig.* 281), l'arc AB décrit une zone dont les bases sont les cercles AC et BD décrits par les points A et B, et dont la hauteur est la projection CD de l'arc AB sur l'axe PP′.

Fig. 281.



Si l'un des plans est tangent à la sphère, l'un des cercles considérés se réduit à un point, et la zone, qui n'a plus alors qu'une base, reçoit le nom de *calotte sphérique*. Ainsi l'arc PA, en tournant autour de PP′, engendre une calotte sphérique dont le cercle AC est la base et dont PC est la hauteur.

THÉORÈME.

487. *Lorsqu'une droite* AB *tourne autour d'un axe xy situé dans son plan, l'aire qu'elle engendre a pour mesure le produit de la projection* CD *de cette droite sur l'axe par la circonférence dont le rayon est la perpendiculaire* IO, *élevée au milieu* I *de la droite* AB *jusqu'à la rencontre de l'axe xy* (*fig.* 282).

Nous supposerons que la droite AB est située tout entière

d'un même côté de l'axe xy. Dès lors, quelles que soient les positions relatives de AB et de xy, l'aire engendrée par AB a pour mesure (450)

(1) $$2\pi.\mathrm{IM}.\mathrm{AB},$$

IM étant la perpendiculaire abaissée du point I sur xy.

Si la droite AB est parallèle à xy (*fig.* 284), le théorème

Fig. 282.

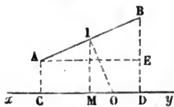


Fig. 283.

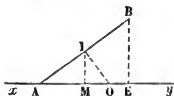


Fig. 284.



proposé est tout démontré; sinon il faut transformer l'expression (1). A cet effet, menons AE parallèle à xy jusqu'à la rencontre de la projetante BD (*fig.* 282); les triangles ABE, IMO, sont semblables comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires, et l'on a

$$\frac{\mathrm{IM}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{AB}}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{IM}.\mathrm{AB} = \mathrm{IO}.\mathrm{AE}.$$

L'expression (1) peut être alors remplacée par

$$2\pi.\mathrm{IO}.\mathrm{AE} \quad \text{ou} \quad 2\pi.\mathrm{IO}.\mathrm{CD},$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Dans le cas où le point A est situé sur l'axe xy (*fig.* 283), le raisonnement subsiste; seulement la droite AE se confond avec l'axe.

THÉORÈME.

488. *L'aire engendrée par une ligne brisée régulière* ABCD, *tournant autour d'un diamètre xy qui ne la traverse pas, a pour mesure le produit de la circonférence inscrite dans la ligne brisée par la projection* A′D′ *de cette ligne sur l'axe xy* (*fig.* 285).

Soient O le centre et OI = OK = OL, l'apothème de la ligne brisée régulière ABCD; si l'on désigne par aire AB l'aire engendrée par la rotation de AB autour de xy, on a, par le théorème précédent,

$$\text{aire AB} = \mathrm{A'B'}.\text{circ}.\mathrm{OI},$$

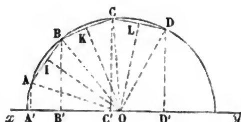
et de même

$$\text{aire BC} = B'C'.\text{circ}.OI,$$
$$\text{aire CD} = C'D'.\text{circ}.OI,$$

d'où, en ajoutant,

$$\text{aire ABCD} = (A'B' + B'C' + C'D').\text{circ}.OI = \text{circ}.\ OI.A'D'.$$

Fig. 285.



THÉORÈME.

489. *L'aire d'une zone sphérique a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle.*

Par définition, l'aire de la zone est la limite vers laquelle tend l'aire engendrée par une ligne brisée régulière inscrite dans l'arc générateur de la zone, lorsque le nombre des côtés de cette ligne brisée croît indéfiniment. D'après cela, soient S l'aire de la zone, H sa hauteur, et R le rayon de l'arc générateur, c'est-à-dire le rayon de la sphère à laquelle la zone appartient; soient de même s l'aire engendrée par une ligne brisée régulière inscrite dans l'arc générateur, et a l'apothème de cette ligne brisée. On a (488), puisque la projection de la ligne brisée sur l'axe est aussi égale à H,

$$s = H.2\pi a.$$

Mais, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée, H reste invariable, s tend vers S, et a vers R. On a donc, à la limite,

$$S = H.2\pi R.$$

COROLLAIRES.

490. Dans des sphères égales, deux zones sont entre elles comme leurs hauteurs, et par suite deux zones de même hauteur sont équivalentes.

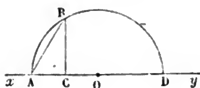
491. Considérons la calotte sphérique engendrée par l'arc AB tournant autour du diamètre AD (*fig.* 286). En vertu du théo-

rème précédent, l'aire de cette calotte a pour mesure

$$2\pi.AO.AC = \pi.AD.AC \quad \text{ou (199)} \quad \pi.\overline{AB}^2.$$

Donc, *une calotte sphérique quelconque équivaut au cercle dont le rayon est égal à la corde de l'arc générateur de la calotte.*

Fig. 286.



THÉORÈME.

492. *L'aire de la sphère a pour mesure le produit de son diamètre par la circonférence d'un grand cercle.*

Car cette aire peut être considérée comme celle d'une zone dont la hauteur est égale au diamètre de la sphère. D'ailleurs le raisonnement fait pour la zone s'applique textuellement à ce cas particulier.

COROLLAIRES.

493. S étant l'aire d'une sphère de rayon R, on a

$$S = 2R.2\pi R = 4\pi R^2.$$

L'aire de la sphère est donc *égale à quatre grands cercles.* On peut dire encore qu'elle équivaut à l'aire d'un cercle dont le rayon serait égal au diamètre de la sphère.

494. *Les aires de deux sphères sont entre elles comme les carrés des rayons ou des diamètres.*

495. Voici deux applications numériques :

1° *Trouver, à moins d'un myriamètre carré, la surface du globe terrestre.*

On sait, par la définition du mètre, que la circonférence d'un grand cercle du globe renferme 40 millions de mètres ou 4000 myriamètres; son diamètre est donc égal à $\frac{4000}{\pi}$, et par

suite (493) l'aire du globe est

$$\pi\left(\frac{4000}{\pi}\right)^2 = \frac{16\,000\,000}{\pi} = 5092958^{\text{Mm}^2}$$

à un myriamètre carré près.

2° *L'aire d'une sphère est 1 mètre carré; quel est son rayon?* La formule

$$4\pi R^2 = 1 \quad \text{donne} \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0^{\text{m}},282$$

à un millimètre près.

EXERCICES.

1. Calculer en myriamètres carrés l'aire de l'une des deux zones glaciales, sachant que le petit cercle qui lui sert de base est à 23° 30′ du pôle.

2. Dans une sphère de rayon donné, mener un plan sécant AIB tel, que le rapport de la calotte sphérique qu'il détermine à l'aire latérale du cône qui a pour base le cercle AIB, et pour sommet le centre de la sphère, soit égal à m; discussion.

3. Inscrire dans une sphère un cône dont l'aire latérale soit équivalente à celle de la calotte sphérique que sa base détermine.

4. Si l'on divise une demi-circonférence en trois parties égales et si on la fait tourner autour de son diamètre, la zone engendrée par l'arc du milieu est équivalente à la somme des zones engendrées par les deux arcs extrêmes.

5. Diviser une zone en moyenne et extrême raison par un plan parallèle à ses bases.

6. Couper une sphère par un plan tel, que l'aire de la section soit égale à la différence des deux zones que ce plan détermine.

7. La calotte interceptée par une sphère fixe sur une sphère sécante de rayon variable et qui passe toujours par son centre, a une aire constante. — La zone interceptée par deux sphères fixes concentriques sur une sphère sécante de rayon variable et qui passe toujours par leur centre commun, a une aire constante.

8. Placer sur le cercle générateur d'une sphère l'arc générateur d'une zone dont on connaît l'arc et la hauteur.

9. Placer sur une sphère donnée une calotte sphérique dont l'aire soit double de celle engendrée par la corde de l'arc générateur de la calotte.

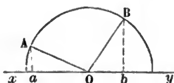
§ V.

PROGRAMME OFFICIEL : *Volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe mené dans son plan par un de ses sommets. — Application au secteur polygonal régulier tournant autour d'un axe mené dans son plan et par son centre. — Volume du secteur sphérique, de la sphère.*

DÉFINITIONS.

496. Soient (*fig.* 287) $x\mathrm{AB}y$ le demi-cercle générateur d'une sphère et, dans ce demi-cercle, le secteur AOB dont la projection de la base AB sur xy est ab. Pendant que la demi-

Fig. 287.



circonférence $x\mathrm{AB}y$ engendre la surface sphérique, l'arc AB engendre une zone (486), et les rayons OA et OB qui limitent le secteur engendrent (440) les surfaces latérales de deux cônes de révolution ayant pour bases les cercles Aa et Bb. La portion du volume de la sphère comprise entre les surfaces latérales de ces deux cônes et la zone AB est le *secteur sphérique* correspondant au secteur circulaire AOB.

Un secteur sphérique est donc le volume engendré par la rotation d'un secteur circulaire autour d'un diamètre extérieur à sa surface; la zone engendrée par l'arc du secteur circulaire est la *base* du secteur sphérique.

THÉORÈME.

497. *Lorsqu'un triangle tourne autour d'un axe situé dans son plan et passant par l'un de ses sommets sans traverser sa surface, il engendre un volume qui a pour mesure le produit de l'aire que décrit le côté opposé au sommet fixe, par le tiers de la hauteur relative à ce côté.*

Soit le triangle ABC ayant son sommet A sur l'axe xy et AE pour hauteur relative à ce sommet : nous distinguerons trois cas.

1° Supposons l'un des côtés AB du triangle ABC confondu avec l'axe *xy*. Suivant que la hauteur CD qui correspond au côté AB tombe à l'intérieur (*fig.* 288) ou à l'extérieur

Fig. 288.

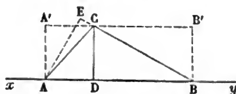
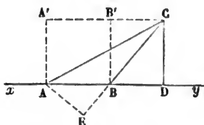


Fig. 289.



(*fig.* 289) du triangle ABC, le volume engendré par ce triangle est la somme ou la différence des cônes engendrés par les triangles rectangles ACD, BCD.

En même temps, le cylindre engendré par la rotation du rectangle ABB'A', qui a même base et même hauteur que le triangle donné ABC, est la somme (*fig.* 288) ou la différence (*fig.* 289) des cylindres engendrés par la rotation des rectangles ADCA', BDCB', dont le rectangle ABB'A' est lui-même la somme ou la différence. D'ailleurs, le cône ACD est le tiers du cylindre ADCA', et le cône BCD le tiers du cylindre BDCB' (453). Donc, dans l'un et l'autre cas, le volume engendré par le triangle ABC est le tiers du cylindre ABB'A', et l'on a

$$\text{vol.ABC} = \frac{1}{3}\pi\overline{\text{CD}}^2.\text{AB} = \frac{1}{3}\pi\text{CD.BC.AE}.$$

En effet, CD.AB = BC.AE, car ces produits représentent tous deux le double de l'aire du triangle donné. Or, π.CD.BC exprime (445) l'aire latérale du cône BCD ou l'aire de la surface engendrée par le côté BC dans la rotation du triangle ABC. Par suite,

$$\text{vol.ABC} = \text{aire BC}.\frac{\text{AE}}{3}.$$

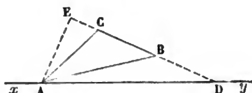
2° Supposons (*fig.* 290) que, le côté AB du triangle n'ayant plus que le sommet A sur l'axe *xy*, le côté BC prolongé vienne rencontrer l'axe au point D.

Le triangle ABC étant la différence des triangles ACD, ABD, le volume qu'il engendre est la différence des volumes engen-

drés par ces triangles. On aura donc (1°)

$$\text{vol.}\,\text{ABC} = (\text{aire DC} - \text{aire DB})\frac{\text{AE}}{3} = \text{aire BC}.\ \frac{\text{AE}}{3}.$$

Fig. 290.



3° Supposons enfin que le côté AB du triangle n'ayant plus que le sommet A sur l'axe xy, le côté BC soit parallèle à cet axe.

Le volume engendré par le triangle ABC est la somme (*fig.* 291) ou la différence (*fig.* 292) des volumes engendrés

Fig. 291.

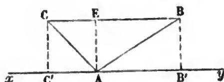
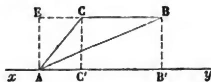


Fig. 292.



par les triangles ABE, ACE. Or, le volume engendré par le triangle ABE est les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle AB′BE, et le volume engendré par le triangle ACE les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle AC′CE (453). Donc, dans l'un et l'autre cas, le volume engendré par le triangle ABC est les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle B′C′CB, somme (*fig.* 291) ou différence (*fig.* 292) des rectangles AB′BE, AC′CE; et l'on a encore

$$\text{vol.}\,\text{ABC} = \frac{2}{3}\pi\overline{\text{AE}}^2.\text{BC} = \text{aire BC}.\ \frac{\text{AE}}{3}.$$

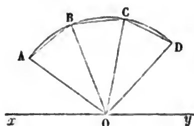
2π.AE.BC exprime en effet l'aire latérale du cylindre engendré par le rectangle B′C′CB ou l'aire de la surface décrite par le côté BC de ce rectangle.

THÉORÈME.

498. *Le volume engendré par un secteur polygonal régulier tournant autour d'un diamètre extérieur à sa surface, a pour*

mesure le produit de l'aire que décrit la ligne brisée qui lui sert de base, par le tiers de l'apothème de cette ligne brisée.

Fig. 293.



Soit (*fig.* 293) le secteur polygonal régulier (268) OABCD, tournant autour du diamètre xy. Décomposons ce secteur en triangles, en joignant au centre O les sommets de sa base ABCD, et appelons a l'apothème de cette base. Le volume engendré par le secteur sera la somme des volumes engendrés par les triangles qui le constituent. Or (497)

$$\text{vol.AOB} = \text{aire AB}.\frac{a}{3},$$

$$\text{vol.BOC} = \text{aire BC}.\frac{a}{3},$$

$$\text{vol.COD} = \text{aire CD}.\frac{a}{3}.$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, il vient

$$\text{vol.OABCD} = (\text{aire AB} + \text{aire BC} + \text{aire CD}).\frac{a}{3},$$

ou

$$\text{vol.OABCD} = \text{aire ABCD}.\frac{a}{3}.$$

THÉORÈME.

499. *Le volume d'un secteur sphérique a pour mesure le produit de l'aire de la zone qui lui sert de base par le tiers du rayon de la sphère.*

Le volume d'un secteur sphérique est la limite des volumes engendrés par les secteurs polygonaux réguliers inscrits dans le secteur circulaire correspondant, quand on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de leurs bases. D'après cela, soient v le volume engendré par un secteur polygonal régulier

inscrit, s l'aire de la surface décrite par sa base, a son apothème; soient de même V le volume du secteur sphérique, S l'aire de la zone qui lui sert de base, R le rayon de la sphère. On a (498)

$$v = s \cdot \frac{a}{3}.$$

Mais lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base du secteur polygonal, v tend vers V, s vers S et a vers R. On a donc, à la limite,

$$V = S \cdot \frac{R}{3}.$$

Corollaire.

500. Dans des sphères égales, deux secteurs sphériques sont entre eux comme les zones qui leur servent de bases et, par suite, deux secteurs sphériques dont les bases ont même hauteur sont équivalents.

THÉORÈME.

501. *Le volume de la sphère a pour mesure le produit de son aire par le tiers du rayon.*

Car ce volume peut être considéré comme celui d'un secteur sphérique ayant pour secteur circulaire correspondant un demi-cercle ou pour base l'aire de la surface sphérique elle-même. D'ailleurs, le raisonnement fait pour le secteur sphérique s'applique textuellement à ce cas particulier.

Corollaires.

502. V étant le volume d'une sphère de rayon R ou de diamètre D, on a

$$V = 4\pi R^2 \cdot \frac{R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

503. *Les volumes de deux sphères sont entre eux comme les cubes des rayons ou des diamètres.*

504. Voici deux applications numériques :

1° *Trouver le volume du globe terrestre.*

L'aire du globe est (495), à moins d'un myriamètre carré,

5092958 myriamètres carrés. Son rayon est d'ailleurs $\frac{20000000^{m}}{\pi}$ ou 6366 kilomètres, à un kilomètre près. Le volume du globe terrestre, égal au produit de son aire par le tiers du rayon, sera donc 1081000000 myriamètres cubes, à un million de myriamètres cubes près.

Si l'on prend le rayon du globe terrestre pour unité, le rayon du Soleil est représenté par 108,5. L'aire et le volume du Soleil sont donc environ 11800 fois et 1280000 fois l'aire et le volume de la Terre (494, 503).

2° *Trouver le rayon de la sphère dont le volume est un mètre cube.*

La formule

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 1 \quad \text{donne} \quad R = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = 0^{m},620$$

à moins d'un millimètre.

SCOLIE.

505. *Les volumes de deux polyèdres circonscrits à la même sphère ou à des sphères égales, sont entre eux comme les aires de ces mêmes polyèdres.*

Si l'on décompose, en effet, les polyèdres donnés en pyramides, en prenant pour centre de décomposition le centre de la sphère inscrite, la mesure du volume de chacun d'eux s'obtiendra en multipliant l'aire de sa surface par le tiers du rayon de la sphère (408).

EXERCICES.

1. Le poids d'un décimètre cube de fonte étant $7^{kil},2$, calculer avec la plus grande approximation possible le diamètre d'un boulet en fonte du poids de 24 kilogrammes.

2. Ayant mené la droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle, on le fait tourner autour de son troisième côté pris pour axe; quel est le rapport des volumes engendrés par les deux parties du triangle?

3. On prolonge l'un des côtés a d'un triangle équilatéral d'une longueur égale à a et, par l'extrémité obtenue, on élève une perpendiculaire à ce côté; calculer le volume engendré par le triangle équilatéral en tournant autour de cette perpendiculaire.

4. Le volume engendré par un triangle, tournant autour d'une droite de son plan qui lui est extérieure, a pour mesure le produit de son aire par la circonférence que décrit dans le mouvement de rotation le point de rencontre de ses trois médianes.

5. Les volumes d'un cône de révolution, d'une sphère et d'un cylindre de révolution, de même hauteur, sont proportionnels aux nombres 1, 2, 3, lorsque le cône et le cylindre ont pour bases un grand cercle de la sphère.

6. L'aire totale ou le volume du cylindre équilatéral inscrit ou circonscrit à une sphère est moyenne proportionnelle entre l'aire ou le volume de cette sphère et l'aire totale ou le volume du cône équilatéral inscrit ou circonscrit.

7. On prend un point B sur le prolongement du rayon OA d'un cercle donné, et l'on mène par ce point au cercle la tangente BT; chercher pour quelle position du point B les aires décrites par la droite BT et l'arc AT, lorsqu'on fait tourner la figure autour de l'axe OAB, sont dans un rapport donné; discussion.

8. Étant donné un triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle, trouver le rapport du volume ou de l'aire qu'il engendre, lorsque la figure tourne autour du diamètre du demi-cercle, au volume ou à l'aire de la sphère engendrée par ce demi-cercle. — Cas où le triangle rectangle donné est isocèle.

QUESTIONS PROPOSÉES

SUR LE SEPTIÈME LIVRE.

1. La hauteur d'un tronc de cône de révolution étant 3 mètres et ses bases ayant pour rayons 2 mètres et 1 mètre, partager son volume en trois parties proportionnelles aux nombres 2, 3 et 7 par deux plans parallèles aux bases.

2. Soit ABCDEF un hexagone régulier circonscrit à un cercle de centre O et de rayon R. On mène la diagonale FC et les droites AC et BF qui se coupent en I sur le rayon OH perpendiculaire à FC, et l'on demande de calculer, en fonction de R, les volumes et les aires des cônes engendrés par les triangles IHA, IOF, en tournant autour de OH pris pour axe.

3. Calculer les rayons des bases d'un tronc de cône de révolution, connaissant sa hauteur, son côté et son aire ou son volume.

4. Quel est le volume maximum d'un cône de révolution dont le côté est donné?

5. Parmi tous les cylindres ou tous les cônes qui ont même aire totale, quel est le cylindre ou le cône de volume maximum? — Parmi tous les

cylindres ou tous les cônes équivalents, quel est le cylindre ou le cône d'aire totale minimum?

6. Inscrire dans un cône donné un cylindre de volume donné; discussion. — Circonscrire à un cylindre donné un cône de volume donné; discussion.

7. Mener dans une sphère donnée trois cordes perpendiculaires entre elles, qui passent par un point donné et qui soient proportionnelles à des nombres donnés. — Mener dans une sphère donnée trois plans perpendiculaires entre eux, qui passent par un point donné et qui déterminent trois cercles dont les aires soient proportionnelles à des nombres donnés.

8. Trouver le lieu des centres des sphères qui coupent deux sphères données ou trois sphères données suivant des grands cercles.

9. Construire une sphère :

1° De rayon donné, qui passe par trois points donnés;

2° De rayon donné, passant par deux points donnés et tangente à un plan ou à une sphère donnée;

3° De rayon donné, passant par un point donné et tangente à deux plans ou à deux sphères données;

4° De rayon donné, tangente à trois plans ou à trois sphères données;

5° De rayon donné, passant par un point donné et tangente à un plan et à une sphère donnés;

6° De rayon donné, tangente à deux plans et à une sphère donnés;

7° De rayon donné, tangente à un plan et à deux sphères donnés.

10. Un cylindre, inscrit dans une sphère d'un mètre de rayon, a pour aire latérale la moitié de l'aire d'un grand cercle de la sphère : calculer son volume.

11. L'aire totale d'une chaudière cylindrique terminée par deux hémisphères est de a^2 mètres carrés, toute section passant par l'axe a un périmètre de b mètres : calculer la hauteur et le rayon de la partie cylindrique de la chaudière; discussion.

12. Calculer en fonction de leurs côtés les aires et les volumes engendrés par les polygones réguliers les plus simples, depuis le triangle jusqu'à l'octogone, lorsqu'ils tournent autour d'un de leurs côtés pris pour axe. — Même question, en prenant pour axe de rotation une perpendiculaire menée à l'extrémité d'un des diamètres du cercle circonscrit, qui aboutit à un sommet du polygone considéré.

13. Inscrire ou circonscrire à une sphère donnée un cône ou un cylindre dont l'aire totale ou le volume soit à l'aire ou au volume de la sphère dans un rapport donné; discussion.

14. La longueur de l'axe d'une chaudière cylindrique terminée par deux hémisphères étant donnée, calculer les dimensions de la partie cy-

lindrique de manière que la capacité de la chaudière ait une valeur donnée; discussion.

15. Étant donné le volume d'un secteur sphérique appartenant à une sphère de rayon R, chercher le maximum de son aire totale.

16. On donne les volumes engendrés par un triangle en tournant successivement autour de chacun de ses côtés; calculer les trois côtés du triangle.

17. Construire un triangle, connaissant deux côtés et sachant que le volume engendré par ce triangle en tournant autour du troisième côté est égal à la somme des volumes qu'il engendre en tournant successivement autour des deux côtés donnés.

18. Les rayons de la Lune, de la Terre et du Soleil étant proportionnels aux nombres $\frac{3}{11}$, 1 et 108,5, trouver le rapport des distances du centre de la Terre aux centres des deux autres astres, lorsqu'on suppose les centres de ces trois globes sur l'axe d'un cône de révolution qui leur est tangent; considérer le cas où les trois astres sont tangents à une même nappe, et celui où la Terre étant située dans une nappe, les deux autres astres sont dans la nappe opposée.

COMPLÉMENT
DES ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE.

§ I.

Programme officiel : *Pôle de similitude de deux polygones semblables et semblablement placés.*

506. Étant donné un système quelconque A, B, C,..., de points situés dans un plan (*fig.* 294 et 295), si, sur les rayons SA, SB, SC,..., issus d'un point S choisi arbitrairement dans

Fig. 294.

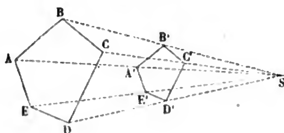
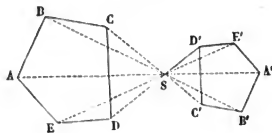


Fig. 295.



le plan, on prend à partir de ce point des segments SA', SB', SC',.., tels qu'on ait

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC}{SC} = \ldots = K,$$

K étant un nombre quelconque, on dit que le nouveau système de points A', B', C',..., est *homothétique* au système primitif A, B, C,....

Le point S est dit le *centre* et le nombre K le *rapport d'homothétie*, Si les points homologues A et A', B et B',... sont d'un même côté du point S (*fig.* 294), les deux systèmes ABC..., A'B'C'..., sont dits *homothétiques directs;* on dit qu'ils sont *homothétiques inverses* si les points homologues A et A', B et B',... sont de part et d'autre du point S (*fig.* 295).

Quand deux systèmes sont homothétiques inverses, il suffit évidemment, pour les rendre homothétiques directs, de faire tourner l'un d'eux de 180 degrés autour du centre S.

Suivant que les points du premier système ABC... sont isolés ou forment des lignes continues, les points du système homothétique A′B′C′... sont à leur tour isolés ou forment des lignes continues.

THÉORÈME.

507. *Dans deux systèmes homothétiques, la droite* AB *qui joint deux points quelconques du premier système, et la droite* A′B′ *qui joint les points homologues du second système, sont parallèles et dans le rapport* K (*fig.* 294 et 295).

En effet, les droites AB et A′B′, divisant les rayons SA et SB dans le même rapport K, sont parallèles (170), et l'on a en outre (176)

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{SA'}{SA} = K.$$

COROLLAIRES.

508. Si trois points du premier système sont en ligne droite, il en est de même des trois points homologues du second système ; en d'autres termes, *la figure homothétique d'une ligne droite est une ligne droite parallèle à la première ;* ces deux droites sont dites *homologues.* Si une droite passe par le centre d'homothétie, son homologue y passe également, et par suite coïncide avec elle. Réciproquement, si deux droites homologues coïncident, elles passent par le centre d'homothétie.

509. *L'angle de deux droites est égal à celui de leurs droites homologues.* Par suite, *la figure homothétique d'un polygone est un polygone semblable au premier.* Les côtés du nouveau polygone sont parallèles aux côtés homologues du premier, et leur rapport de similitude est égal à K.

510. *Les tangentes en deux points homologues de deux courbes homothétiques, sont parallèles* comme limites de sécantes parallèles.

THÉORÈME.

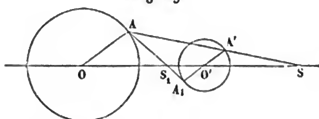
511. *Deux systèmes sont homothétiques s'il existe dans leur plan deux points* O *et* O′ *tels, que les droites qui joignent le point* O *aux divers points du premier système, et les droites qui joignent le point* O′ *aux divers points du second système, soient parallèles et dans un même rapport* K (*fig.* 296).

En effet, si les droites OA et O'A' sont parallèles et de même sens, la droite AA' ira couper le prolongement de OO' en un point S, tel que

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'A'}{OA} = K = \frac{SA'}{SA}.$$

Le point S est donc le même, quel que soit le couple de

Fig. 296.



points homologues A et A' considéré; et, par suite, les deux systèmes sont homothétiques directs, et ont le point S pour centre et le nombre K pour rapport d'homothétie.

Si les droites OA et $O'A_1$ sont parallèles et de sens contraires, la droite AA_1 coupe OO' en un point S_1, tel que

$$\frac{S_1O'}{S_1O} = \frac{O'A_1}{OA} = K = \frac{S_1A_1}{S_1A},$$

et les deux systèmes, alors homothétiques inverses, ont le point S_1 pour centre et le nombre K pour rapport d'homothétie.

COROLLAIRES.

512. *Deux polygones semblables* ABCDE, A'B'C'D'E', *qui ont leurs côtés parallèles, sont homothétiques.* Il résulte, en effet, des raisonnements faits au n° 186, que si, dans le plan du premier polygone, on prend un point O quelconque et que l'on détermine, conformément aux indications données dans ce n° 186, le point O' homologue de O, les droites OA et O'A', OB et O'B', OC et O'C',..., seront parallèles et dans le rapport K. Donc les polygones seront homothétiques.

L'homothétie est directe (*fig.* 294) ou inverse (*fig.* 295), suivant que les deux polygones ont leurs côtés parallèles, de même sens ou de sens contraires.

513. *Deux circonférences quelconques sont homothétiques directes et homothétiques inverses* (*fig.* 296).

En effet, le rapport $\frac{O'A'}{OA}$ de deux rayons parallèles et de même sens étant constant, les deux circonférences sont homothétiques directes, et elles ont un *centre d'homothétie directe* S situé au delà de la ligne des centres, de telle sorte qu'on ait

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{R'}{R},$$

R′ et R étant les rayons des deux cercles.

De même, le rapport $\frac{O'A_1}{OA}$ de deux rayons parallèles et de sens contraires étant constant, les deux circonférences sont aussi homothétiques inverses, et elles ont un *centre d'homothétie inverse* S_1 situé sur la ligne des centres, de telle sorte qu'on ait

$$\frac{S_1O'}{S_1O} = \frac{R'}{R}.$$

On voit que *les deux centres d'homothétie divisent harmoniquement la ligne des centres OO′ des deux cercles.*

Les tangentes communes extérieures passent par le centre d'homothétie directe, et les tangentes communes intérieures par le centre d'homothétie inverse. C'est sur cette propriété qu'est fondée la construction du n° 217.

Lorsque les deux cercles sont tangents, leur point de contact est un centre d'homothétie, *directe* si le contact est *intérieur, inverse* si le contact est *extérieur.*

Scolie.

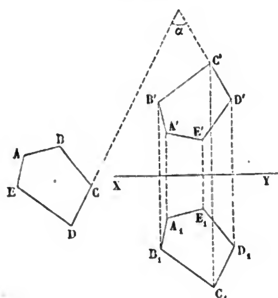
514. Pour étendre aux figures curvilignes la notion de la similitude, il faut prendre pour point de départ une propriété *essentielle* des polygones semblables qui soit immédiatement appréciable envers les courbes. Voici comment on parvient à faire cette généralisation :

Considérons deux polygones semblables.

Si ces polygones sont semblablement disposés par rapport à deux observateurs placés à l'intérieur de chacun d'eux, comme cela arrive pour les polygones ABCDE, A′B′C′D′E′ (*fig.* 297), il est facile de voir que deux côtés homologues

quelconques font toujours le même angle α. On amènera donc les deux polygones à avoir leurs côtés homologues parallèles, en faisant tourner l'un d'eux de l'angle α autour de l'un de ses sommets.

Fig. 297.



Si les polygones sont inversement disposés comme ABCDE, $A_1B_1C_1D_1E_1$, il faudra, pour rendre leurs côtés homologues parallèles, rabattre le second polygone autour d'une droite quelconque XY, puis faire tourner d'un angle α le polygone A'B'C'D'E' ainsi obtenu.

Ainsi deux polygones semblables P et P' étant donnés dans un plan, on peut toujours (soit par une rotation, soit par un rabattement et une rotation) amener le second à avoir ses côtés parallèles aux côtés homologues du premier.

Or, on a vu que deux polygones semblables qui ont les côtés parallèles sont homothétiques (512). Deux polygones semblables peuvent donc, d'après cela, être rendus homothétiques; et réciproquement, la figure homothétique d'un polygone est un polygone semblable au premier (509).

Par suite, pour qu'un polygone P' soit semblable à un autre polygone P, il faut et il suffit que ce polygone P' soit égal à l'un des homothétiques de P.

Voilà donc une propriété *caractéristique* des polygones semblables. D'ailleurs, la définition de l'homothétie est immédiatement applicable aux figures curvilignes (506). On est ainsi conduit à cette définition générale :

On dit qu'*une figure est semblable à une autre, lorsqu'elle est égale à l'une des figures homothétiques à cette autre.*

On comprend d'après cela pourquoi on donne, en général, les noms de centres ou pôles de similitude et de rapport de similitude aux centres et au rapport d'homothétie.

---

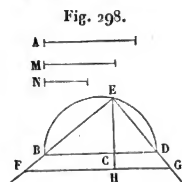
§ II.

Programme officiel : *Construire un carré dont le rapport à un carré donné soit égal au rapport de deux lignes données. — Construire un rectangle équivalent à un carré donné et dont les côtés adjacents aient une somme ou une différence donnée. — Application à la construction des racines des équations du second degré à une inconnue.*

PROBLÈME.

515. *Construire un polygone semblable à un polygone donné, et dont l'aire soit à celle de ce polygone dans le rapport de deux droites données* M *et* N (*fig.* 298).

Fig. 298.



Supposons d'abord que le polygone donné soit un carré, et soit A son côté. Si X est le côté du carré cherché, on devra avoir (250)

$$\frac{X^2}{A^2} = \frac{M}{N}.$$

La question est donc de construire un triangle rectangle tel, que le rapport des segments déterminés sur l'hypoténuse par la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit soit

égal à $\frac{M}{N}$ (198), et que le côté adjacent au segment qui correspond à N soit égal à A.

Or, en portant sur une droite indéfinie $BC = M$, $CD = N$, en décrivant une demi-circonférence sur BD comme diamètre et en menant à BD la perpendiculaire CE jusqu'à la rencontre de cette demi-circonférence, on obtiendra un triangle rectangle BED dans lequel les segments de l'hypoténuse présenteront le rapport demandé. Il en sera de même (190) pour tous les triangles rectangles semblables qu'on formera en menant entre les côtés de l'angle droit BED, prolongés ou non, une parallèle à l'hypoténuse BD. Parmi tous ces triangles, celui dont le côté, dirigé suivant ED, est égal à A, répond à la question.

On portera donc sur ED la longueur $EG = A$; par le point G, on mènera à BD la parallèle GF jusqu'à la rencontre de EB, et FE représentera le côté du carré cherché. On a en effet (198, 190)

$$\frac{\overline{EF}^2}{\overline{EG}^2} = \frac{FH}{HG} = \frac{BC}{CD}, \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{EF}^2}{A^2} = \frac{M}{N}.$$

Soit maintenant un polygone quelconque P, soient p l'un de ses côtés et x le côté homologue du polygone cherché X. On devra avoir, d'après l'énoncé,

$$\frac{X}{P} = \frac{M}{N} \quad \text{et} \quad \frac{X}{P} = \frac{x^2}{p^2},$$

d'où

$$\frac{x^2}{p^2} = \frac{M}{N}.$$

Le problème se trouve donc ramené à trouver le côté d'un carré qui soit à un carré donné dans le rapport de deux droites données, question que nous venons de résoudre. Quand on aura obtenu le côté x homologue de p, il restera à construire sur ce côté un polygone semblable au polygone P.

Dans le cas de deux cercles, en désignant par x et r leurs rayons, on devra avoir

$$\frac{\pi x^2}{\pi r^2} = \frac{M}{N} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{r^2} = \frac{M}{N}.$$

C'est encore le même problème.

516. Si le rapport $\frac{M}{N}$ était donné numériquement et égal, par exemple, à $\frac{5}{7}$, on choisirait une certaine longueur pour unité, et l'on rentrerait dans le cas précédent en prenant les droites BC et CD égales à cinq fois et à sept fois cette longueur.

PROBLÈME.

517. *Construire un rectangle équivalent à un carré donné et dont les côtés adjacents aient une somme ou une différence donnée.*

1° Soient A le côté du carré donné et BC la somme donnée (*fig.* 299). Sur BC comme diamètre, décrivez un demi-cercle; au point B, élevez BD perpendiculaire sur BC et égale à A; menez DEE′ parallèle à BC, et projetez en F et F′ sur BC les points E et E′ où cette parallèle rencontre le cercle. Les deux côtés cherchés seront BF et FC ou, ce qui revient au même, BF′ et F′C. En effet, on a d'abord

$$BF + FC = BC,$$

et ensuite (199),

$$BF . FC = \overline{FE}^2 = \overline{BD}^2 = A^2,$$

relation qui prouve l'équivalence du rectangle ayant pour dimensions BF et FC et du carré construit sur A.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que la parallèle DEE′ rencontre la demi-circonférence, c'est-à-dire que la droite BD ou A ne surpasse pas son rayon ou la moitié de BC. Lorsque la quantité A atteint son maximum $\frac{1}{2}$ BC, la parallèle DEE′ touche le demi-cercle, les deux segments de BC sont OB et OC, et le rectangle cherché est un carré. De là cette proposition : *De tous les rectangles de même périmètre, le plus grand est le carré.*

En représentant par $\sqrt{q}$ le côté du carré donné, et par p la somme donnée, on a

$$EO = BO = CO = \frac{p}{2}, \quad FE = BD = \sqrt{q},$$

$$OF = \sqrt{\overline{EO}^2 - \overline{EF}^2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

et, par suite,

$$BF = BO - OF = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$CF = CO + OF = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Fig. 299.

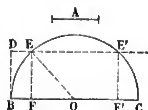
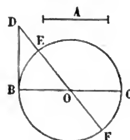


Fig. 300.



2° Soient A le côté du carré donné et EF la différence donnée (*fig.* 300). Sur les côtés d'un angle droit, prenez une longueur BD égale à A et une longueur BO égale à la moitié de la différence donnée. Du point O comme centre, avec BO pour rayon, décrivez un cercle; puis menez DO qui coupe la circonférence aux points E et F; DE et DF seront les côtés cherchés. En effet, on a d'abord

$$DF - DE = EF,$$

et ensuite (209),

$$DE.DF = \overline{DB}^2 = A^2,$$

relation qui exprime l'équivalence du rectangle ayant pour dimensions DE et DF et du carré construit sur A.

Le problème est toujours possible.

En représentant par $\sqrt{q}$ le côté du carré donné et par p la différence donnée, on a

$$OE = OF = OB = \frac{p}{2}, \quad BD = \sqrt{q},$$

$$OD = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

et, par suite,

$$DE = OD - OE = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} - \frac{p}{2},$$

$$DF = OD + OF = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} + \frac{p}{2}.$$

SCOLIE.

518. Le problème précédent permet de construire les racines de toute équation du second degré à une inconnue, c'est-à-dire de toute équation de la forme

$$x^2 \pm px \pm q = 0,$$

p et q étant des nombres positifs quelconques.

En effet, des quatre types

$$x^2 + px + q = 0,$$
$$x^2 - px + q = 0,$$
$$x^2 + px - q = 0,$$
$$x^2 - px - q = 0,$$

le premier se ramène au second, et le troisième au dernier, par le seul changement de x en $-x$. Il suffit donc de construire les racines des équations

$$x^2 - px + q = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - px - q = 0.$$

En mettant ces équations sous la forme

$$q = x(p - x), \quad q = x(x - p),$$

on voit que, construire les racines de la première, c'est construire les deux côtés adjacents x et $p - x$ d'un rectangle, connaissant la somme p de ces côtés et l'aire q ou le côté $\sqrt{q}$ du carré équivalent. De même, construire les racines de la seconde, c'est construire un rectangle équivalent à un carré donné q et dont les côtés x et $x - p$ ont une différence donnée p.

D'après cela, toutes les fois qu'une question de Géométrie, traitée par l'Algèbre, conduira à une équation du second degré, on saura immédiatement construire la solution.

519. Le calcul algébrique est un utile auxiliaire dans les recherches géométriques; son emploi permet d'arriver directement à des formules que la Géométrie pure ne donnerait souvent que d'une manière pénible et détournée.

Voici un exemple :

Trouver l'aire d'un triangle en fonction des côtés.

Soient ABC le triangle; a, b, c, les longueurs des côtés respectivement opposés aux angles A, B, C; S l'aire et h la hauteur AD issue du sommet A (*fig.* 140).

On a (255)

$$S = \frac{1}{2} ah.$$

Pour calculer h en fonction de a, b, c, remarquons que des deux angles B et C, l'un au moins est aigu; supposons que ce soit l'angle C. Le triangle rectangle ADC donne (201)

$$h^2 = b^2 - \overline{CD}^2;$$

on a d'ailleurs dans le triangle ABC (202)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a.CD, \quad \text{d'où} \quad CD = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

et, par suite,

$$h^2 = b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}.$$

Donc

$$S^2 = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{16}$$

$$= \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{16}$$

$$= \frac{[(a + b)^2 - c^2][c^2 - (a - b)^2]}{16}$$

$$= \frac{(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)}{16}.$$

Or, si l'on désigne par p le demi-périmètre du triangle ABC, c'est-à-dire si l'on pose

$$a + b + c = 2p,$$

on a

$$b + c - a = 2p - 2a = 2(p - a),$$
$$a + c - b = 2p - 2b = 2(p - b),$$
$$a + b - c = 2p - 2c = 2(p - c),$$

et enfin

$$S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c).$$

Par exemple, pour

$$a = 13^{m}, \quad b = 9^{m}, \quad c = 6^{m},$$

on a

$$p = 14, \quad p - a = 1, \quad p - b = 5, \quad p - c = 8,$$

et

$$S^2 = 560, \quad \text{d'où} \quad S = 23^{mq},67,$$

à moins de $\frac{1}{2}$ décimètre carré.

---

§ III.

Programme officiel : *Retour sur l'inscription des polygones réguliers. — Cas du décagone.*

520. Nous avons, au § V du livre III, inscrit à l'aide de la règle et du compas les polygones réguliers de 4, 8, 16, 32,... côtés et ceux de 3, 6, 12, 24,... côtés. Nous allons nous occuper ici des polygones réguliers de 5, 10, 20, 40,... côtés et de 15, 30, 60, 120,... côtés. Mais quelques notions préliminaires sont indispensables.

Supposons la circonférence divisée en m parties égales; désignons par a la longueur de l'une des parties, et joignons les points de division de p en p, à partir de l'un d'eux.

Si p est premier avec m, la circonférence ma et l'arc pa sous-tendu par chacune des cordes successives auront pour plus petit multiple commun pma, et l'on reviendra au point de départ après avoir parcouru p fois la circonférence ou m fois l'arc pa. On aura donc formé ainsi un polygone régulier de m côtés. Par exemple, dans la *fig.* 302 où la circonférence est divisée en 10 parties égales, on obtient, en joignant les points de division de 1 en 1, le décagone convexe, et en joignant ces points de 3 en 3 un décagone régulier *étoilé*.

Si p et m, au lieu d'être premiers entre eux, ont un plus grand commun diviseur θ, le plus petit multiple commun de l'arc pa et de la circonférence ma sera $\frac{mp}{\theta}a$. On reviendra alors au point de départ après avoir parcouru $\frac{p}{\theta}$ fois la cir-

conférence ou $\frac{m}{\theta}$ fois l'arc pa; en d'autres termes, on aura formé ainsi un polygone régulier de $\frac{m}{\theta}$ côtés, et non plus de m côtés.

Au premier abord, il semble résulter de là qu'il existe autant de polygones réguliers (convexes ou étoilés) de m côtés qu'il y a de nombres premiers à m dans la suite 1, 2,..., $m-1$. Mais si l'on remarque qu'en joignant les points de division de p en p, p étant premier à m, on obtient le même polygone qu'en les joignant de $m-p$ en $m-p$, on voit qu'en réalité *le nombre des polygones réguliers de m côtés est égal au nombre des entiers premiers à m contenus dans la suite*

$$1, 2, 3, \ldots, \frac{m-1}{2}.$$

D'après cela, il n'y a qu'un hexagone régulier; il y a deux pentagones réguliers, deux décagones, quatre pentédécagones, etc.

L'inscription du décagone est fondée sur le problème suivant:

PROBLÈME.

521. *Diviser une droite en moyenne et extrême raison* (*fig.* 301).

Fig. 301.



On dit qu'un point divise une droite AB *en moyenne et extrême raison,* lorsque sa distance à l'une des extrémités A de cette droite est moyenne proportionnelle entre sa distance à l'autre extrémité B et la droite AB.

On voit *à priori* :

1° Que, entre A et B, il existe un point X et un seul jouissant de la propriété énoncée. Car, de A en B, le rapport $\frac{AB}{XA}$ décroît d'une manière continue de l'infini à 1, tandis que le rapport $\frac{XA}{XB}$ croît de zéro à l'infini; ainsi, quand le point X se meut de A en B, le premier rapport diminue, le second aug-

mente, et comme le premier, d'abord supérieur au second, finit par devenir moindre, il y aura entre A et B une position de X, et une seule, telle qu'on ait

$$(1)\qquad \frac{AB}{XA} = \frac{XA}{XB} \quad \text{ou} \quad \overline{XA}^2 = AB.XB.$$

2° Que, sur le prolongement de AB à gauche du point A, il existe un point X' et un seul jouissant de la propriété énoncée. Car, dans cette région, le rapport $\frac{AB}{X'A}$ croît d'une manière continue de zéro à l'infini, tandis que le rapport $\frac{X'A}{X'B}$ décroît de 1 à 0; il y a donc à gauche de A une position de X', mais une seule, pour laquelle on aura

$$(2)\qquad \frac{AB}{X'A} = \frac{X'A}{X'B} \quad \text{ou} \quad \overline{X'A}^2 = AB.X'B.$$

3° Que sur le prolongement de AB à droite du point B, il ne peut exister aucun point jouissant de la propriété énoncée. Car la distance d'un point de cette région au point A, étant plus grande que la distance du point considéré au point B et que la ligne AB, ne saurait être moyenne proportionnelle entre ces deux longueurs.

Ainsi, sur la droite indéfinie qui unit les points A et B, il existe deux points X et X', et rien que deux, qui divisent la droite AB en moyenne et extrême raison : l'un X *intérieur*, et les deux segments correspondants XA, XB, sont alors *additifs;* l'autre X' *extérieur*, et les deux segments correspondants X'A, X'B, sont alors *soustractifs*.

Pour déterminer ces deux points X et X', il suffit de trouver AX et AX'. Or, d'une part, si l'on retranche la relation (1) de la relation (2), on a

$$\overline{X'A}^2 - \overline{XA}^2 = AB(X'B - XB)$$

ou

$$(X'A + XA)(X'A - XA) = AB(X'B - XB),$$

c'est-à-dire

$$XX'(X'A - XA) = AB.XX',$$

et, par suite,

$$X'A - XA = AB.$$

D'autre part, la relation (1) donne

$$\frac{AB + XA}{AB} = \frac{XA + XB}{XA} \quad \text{ou} \quad \frac{X'A}{AB} = \frac{AB}{XA},$$

c'est-à-dire

$$X'A . XA = \overline{AB}^2.$$

Donc, la recherche des droites AX et AX′ revient à construire deux lignes dont la différence est égale à AB et dont le produit est égal à $\overline{AB}^2$; c'est le problème du n° 517 (2°), dans un cas particulier. De là cette construction :

Élevez sur AB, à son extrémité B, une perpendiculaire BC égale à la moitié de AB. Du point C comme centre, avec CB pour rayon, décrivez une circonférence; menez AC qui coupe cette circonférence en D et en D′; la droite AD sera l'inconnue AX, et la droite AD′ sera l'inconnue AX′. Deux arcs de cercles décrits de A comme centre, avec AD et AD′ pour rayons, couperont la droite indéfinie AB aux points cherchés X et X′.

522. En désignant par a la droite AB, et remplaçant dans la formule du n° 517 (2°) p par a et q par a^2, on trouve

$$AX = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) \quad \text{et} \quad AX' = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

PROBLÈME.

523. *Inscrire un décagone régulier dans un cercle donné* (*fig.* 302).

Supposons le problème résolu, c'est-à-dire la circonférence divisée en dix parties égales par les points A, B, C, D, E, F, G, H, K, I.

En joignant les points de division consécutifs, on obtient le décagone régulier convexe ABCDEFGHKI; en joignant les points de division de trois en trois, on obtient le décagone régulier étoilé ADGICFKBEH (520). Il s'agit de construire les côtés AB et AD de ces deux décagones.

Or, en remarquant (*fig.* 303) que le rayon BO prolongé passe par le sommet G, on voit que l'angle AMB, dont le sommet est à l'intérieur du cercle, a pour mesure la moitié de l'arc AB, plus la moitié de l'arc GD, c'est-à-dire deux divisions de la

circonférence. D'ailleurs, l'angle inscrit ABG a pour mesure la moitié de l'arc AG, c'est-à-dire encore deux divisions; l'angle

Fig. 302.

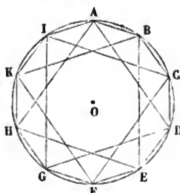
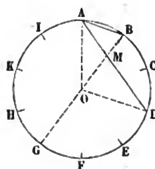


Fig. 303.



au centre BOD a aussi cette même mesure. Les deux triangles AMB, DMO, sont donc isocèles, et l'on a

$$AM = AB, \quad MD = OD \quad \text{ou} \quad AD - AM = OD.$$

D'un autre côté, les angles OMA, DOA, étant égaux comme ayant l'un et l'autre pour mesure trois divisions, les droites OM et OD sont antiparallèles par rapport à l'angle OAD, et l'on a (197)

$$AD.AM = \overline{OA}^2.$$

Les deux relations précédentes montrent que la recherche des côtés AD et AM = AB revient à celle de deux lignes dont la différence est égale au rayon et dont le produit est égal au carré du rayon; *on obtiendra donc ces deux côtés* (521) *en divisant le rayon en moyenne et extrême raison; le plus grand segment additif sera le côté du décagone régulier convexe, et le plus petit segment soustractif sera le côté du décagone régulier étoilé.*

Si R est le rayon du cercle, on aura (522)

$$AB = R.\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{et} \quad AD = R.\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Corollaires.

524. La circonférence étant divisée en dix parties égales, en joignant les points de division de deux en deux, on obtient le *pentagone régulier convexe* ACEGK; en les joignant de quatre en quatre, on trace le *pentagone régulier étoilé* AEKCG (*fig.* 304).

Pour calculer les côtés FD et FB (*fig.* 305) du pentagone régulier convexe et du pentagone étoilé, il suffit de remarquer

Fig. 304.

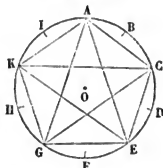
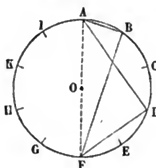


Fig. 305.



que, si l'on mène le diamètre FA, les cordes AD et AB sont les côtés du décagone étoilé et du décagone convexe. Or les triangles rectangles FAD, FAB, donnent

$$FD = \sqrt{4R^2 - \overline{AD}^2}, \quad FB = \sqrt{4R^2 - \overline{AB}^2};$$

d'où, en remplaçant AD et AB par leurs valeurs données au numéro qui précède, et réduisant,

$$FD = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad FB = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

525. Du décagone convexe, on passe au polygone régulier de 20 côtés, puis à celui de 40,..., et ainsi de suite, en prenant chaque fois les milieux des arcs sous-tendus par les côtés du polygone précédent.

PROBLÈME.

526. *Inscrire un pentédécagone régulier dans un cercle donné* (*fig.* 306).

Supposons le problème résolu, c'est-à-dire la circonférence divisée en quinze parties égales par les points A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P.

En joignant les points de division de 1 en 1, de 2 en 2, de 4 en 4, de 7 en 7, on obtient les côtés AB, AO, AE, AI, du pentédécagone convexe et des trois pentédécagones étoilés.

Considérons les côtés AB et AE; Q étant le milieu de l'arc CD, on a

$$\text{arc } AQ = \left(2 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{15} = \frac{1}{6},$$

$$\text{arc } QB = \text{arc } QE = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{15} = \frac{1}{10}.$$

Donc, pour construire AB et AE, il suffit de porter, à partir du point A, une corde AQ égale au côté de l'hexagone, puis à partir de Q, et de part et d'autre de ce point, une corde QB = QE égale au côté du décagone convexe.

Fig. 306.

Pour calculer AB et AE, abaissons du point Q les perpendiculaires QS et QT sur ces côtés; l'égalité des triangles rectangles QAS et QAT, qui ont l'hypoténuse commune et un angle aigu égal QAS = QAT, donne

$$AS = AT, \quad QS = QT;$$

puis, de l'égalité des triangles rectangles BQS, TQE, qui ont l'hypoténuse égale et un côté égal, on déduit

$$ET = BS.$$

On a donc

$$AB = AS - BS \quad \text{et} \quad AE = AT + TE = AS + BS.$$

Mais QS n'est autre que la moitié du côté du décagone convexe, puisque AQ est égal au rayon et que, l'arc BQ étant le dixième de la circonférence, l'angle inscrit BAQ est la moitié de l'angle au centre du décagone convexe; on a donc

$$QS = \frac{R}{4}(\sqrt{5} - 1);$$

par suite,

$$AS = \sqrt{\overline{AQ}^2 - \overline{QS}^2} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$BS = \sqrt{\overline{BQ}^2 - \overline{QS}^2} = \frac{R}{4}(\sqrt{15} - \sqrt{3}).$$

On aura donc, d'après les relations ci-dessus,

$$AB = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}\right),$$

$$AE = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3} + \sqrt{15}\right).$$

On verra de même que X étant le milieu de ML, AX est le côté du décagone étoilé et XO = XI le côté de l'hexagone, ce qui permettra de construire et de calculer d'une manière analogue les côtés AO et AI des deux autres pentédécagones étoilés. On trouve

$$AO = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \sqrt{3} + \sqrt{15}\right),$$

$$AI = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}} + \sqrt{3} + \sqrt{15}\right).$$

527. Du pentédécagone convexe, on passe au polygone de 30 côtés, puis à celui de 60,..., et ainsi de suite, en prenant chaque fois les milieux des arcs sous-tendus par les côtés du polygone précédent.

---

§ IV.

PROGRAMME OFFICIEL : *Calcul du rapport de la circonférence au diamètre par la méthode des isopérimètres.*

528. De nos jours, les Mathématiques supérieures fournissent des séries qui permettent de calculer très-rapidement le rapport de la circonférence au diamètre. Il est cependant utile de connaître les ressources que la Géométrie élémentaire offre à cet égard.

Les formules

$$\pi = \frac{C}{2R}, \quad \pi = \frac{S}{R^2},$$

dans lesquelles C et S désignent la circonférence et l'aire du cercle de rayon R, montrent que, pour avoir π, on peut :

Se donner le rayon R et calculer, soit la longueur C de la circonférence, soit l'aire S du cercle;

Ou se donner, soit la circonférence C, soit l'aire S, et calculer le rayon R.

De là quatre méthodes qui, présentées convenablement, conduisent toutes à ce théorème remarquable :

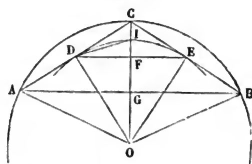
Le nombre $\frac{1}{\pi}$ *est la limite vers laquelle tend la suite des nombres obtenus en partant de* o *et* $\frac{1}{2}$, *et prenant alternativement la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique entre les deux qui précèdent.*

Nous allons démontrer ce théorème en suivant la troisième des quatre méthodes indiquées ci-dessus ; cette méthode, dite *des isopérimètres*, est celle qui conduit le plus directement à la proposition précédente. Elle est fondée sur le problème suivant :

PROBLÈME.

529. *Étant donnés le rayon r et l'apothème a d'un polygone régulier, calculer le rayon r' et l'apothème a' du polygone régulier qui aurait le même périmètre et un nombre de côtés double* (*fig.* 307).

Fig. 307.



Soient AB le côté et O le centre du polygone donné ; en menant le rayon OGC perpendiculaire sur AB, on aura

$$OC = r, \quad OG = a.$$

Tirons CA et CB, et joignons les milieux D et E de ces deux cordes. La droite DE, parallèle à AB et égale à sa moitié, sera le côté du polygone régulier qui a même périmètre et deux fois plus de côtés que le premier. D'ailleurs, l'angle DOE étant la moitié de l'angle au centre AOB du polygone primitif, le point O sera encore le centre du nouveau polygone, et l'on aura

$$OD = r', \quad OF = a'.$$

Or, le point F est le milieu de CG; donc

(1) $$\mathrm{OF} = \frac{1}{2}(\mathrm{OG} + \mathrm{OC}) \quad \text{ou} \quad a' = \frac{1}{2}(a + r).$$

De plus, le triangle rectangle ODC donne (198)

(2) $$\overline{\mathrm{OD}}^2 = \mathrm{OC}.\mathrm{OF} \quad \text{ou} \quad r' = \sqrt{r.a'}.$$

Les relations (1) et (2) résolvent le problème proposé; la première permet de calculer a'; puis, a' étant connu, la seconde donne r'.

Scolie.

530. On voit sur la figure que OF est plus grand que OG et que OD est moindre que OC. Donc, *quand on passe d'un polygone régulier au polygone régulier isopérimètre d'un nombre de côtés double, l'apothème augmente et le rayon diminue*, de sorte que la différence entre le rayon et l'apothème va en décroissant. Le triangle AOG montre que cette différence OA — OG est moindre que AG, c'est-à-dire que la moitié du côté du polygone correspondant; or, le périmètre du polygone restant constant, la valeur de chacun des côtés tend vers zéro lorsqu'on double leur nombre indéfiniment; donc l'*excès du rayon sur l'apothème peut devenir aussi petit qu'on veut.*

PROBLÈME.

531. *Calculer le rapport de la circonférence au diamètre.*

Prenons la circonférence C égale à 2; la formule $\pi = \frac{C}{2R}$ donne alors

$$\pi = \frac{1}{R} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\pi} = R.$$

Le nombre $\frac{1}{\pi}$ est donc la valeur du rayon de la circonférence égale à 2. Par suite, l'apothème a et le rayon r de tout polygone régulier ayant un périmètre égal à 2, sont deux valeurs approchées de $\frac{1}{\pi}$, l'une par défaut, l'autre par excès; car, la circonférence inscrite et la circonférence circonscrite à un tel polygone étant l'une moindre, l'autre plus grande que 2, leurs

rayons a et r doivent comprendre le rayon R de la circonférence égale à 2 (227), c'est-à-dire le nombre $\frac{1}{\pi}$.

Cela posé, considérons le carré dont le côté est $\frac{1}{2}$; son périmètre est 2, son apothème $a_1 = \frac{1}{4}$ et son rayon $r_1 = \frac{1}{4}\sqrt{2}$. Puis, à l'aide des formules (529),

$$(1) \qquad a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + r_k), \quad r_{k+1} = \sqrt{a_{k+1} \cdot r_k},$$

calculons successivement les rayons et les apothèmes a_2 et r_2, a_3 et r_3, a_4 et r_4,... des polygones réguliers isopérimètres de 8, 16, 32,..., côtés. Dans la série

$$a_1, \; r_1, \; a_2, \; r_2, \; a_3, \; r_3, \ldots, \; a_n, \; r_n, \ldots,$$

dont chaque terme à partir du troisième est alternativement moyen arithmétique et moyen géométrique entre les deux qui précèdent, les termes de rangs impairs a_1, a_2, a_3,..., a_n,..., vont en croissant et restent inférieurs à $\frac{1}{\pi}$, tandis que les termes de rangs pairs r_1, r_2, r_3,..., r_n,..., vont en décroissant (530) et restent supérieurs à $\frac{1}{\pi}$. D'ailleurs, on sait (530) que la différence $r_n - a_n$ peut être rendue moindre que toute quantité donnée en prenant n assez grand; donc les termes de la suite

$$a_1, \; r_1, \; a_2, \; r_2, \; a_3, \; r_3, \; \ldots,$$

alternativement inférieurs et supérieurs au nombre $\frac{1}{\pi}$, ont ce nombre pour limite.

Si l'on remarque en outre que $r_1 = \frac{1}{4}$ est la moyenne arithmétique entre 0 et $\frac{1}{2}$, et que $r_2 = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ est la moyenne géométrique entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$, on arrive à la proposition annoncée (528) :

Le nombre $\frac{1}{\pi}$ est la limite vers laquelle tend la suite des nom-

bres obtenus en partant de 0 *et* $\frac{1}{2}$, *et prenant alternativement la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique entre les deux qui précèdent.*

En prolongeant le calcul de ces moyennes jusqu'à ce que deux termes consécutifs aient $m+1$ décimales communes, on aura $\frac{1}{\pi}$ à moins d'une unité décimale de l'ordre $m+1$, et par suite, en divisant 1 par le nombre ainsi trouvé, on aura π à moins d'une unité du $m^{ième}$ ordre décimal. Car si l'on désigne respectivement par ε' et ε les erreurs correspondantes de π et de $\frac{1}{\pi}$, on a, en négligeant le produit $\pi\varepsilon\varepsilon'$,

$$\varepsilon' = \pi^2 \varepsilon, \quad \text{d'où} \quad \varepsilon' < 10\varepsilon.$$

Voici le tableau des calculs jusqu'au polygone de 128 côtés :

Nombre des côtés.	Apothèmes.	Rayons.
4	$a_1 = 0,2500000$	$r_1 = 0,3535534$
8	$a_2 = 0,3017767$	$r_2 = 0,3266407$
16	$a_3 = 0,3142087$	$r_3 = 0,3203645$
32	$a_4 = 0,3172866$	$r_4 = 0,3188218$
64	$a_5 = 0,3180542$	$r_5 = 0,3184377$
128	$a_6 = 0,3182459$	$r_6 = 0,3183418$

On trouve ainsi pour $\frac{1}{\pi}$ la valeur 0,318 à moins d'un millième, et même 0,3183 à moins d'un dix-millième; par suite, en divisant l'unité par ce dernier nombre, on obtient pour π la valeur 3,142 à moins d'un millième.

532. Nous indiquerons, pour les élèves de mathématiques spéciales, quelques développements nouveaux qui permettent d'abréger beaucoup les calculs.

La limite vers laquelle tend la suite des nombres obtenus en partant de a_k et de r_k et prenant successivement la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique entre les deux qui précèdent, est une fonction *homogène* de a_k et de r_k; car, si l'on multiplie a_k et r_k par λ, on voit par la formule (1) du nº 531 que tous les termes de la suite $a_{k+1}, r_{k+1}, a_{k+2}, r_{k+2}, \ldots$, et par suite leur limite, sont multipliés par λ. La quantité $\frac{1}{\pi}$ est donc égale au produit de a_k par une fonction de $\frac{r_k}{a_k}$; de sorte que, si l'on pose

$$\frac{r_k}{a_k} = 1 + u, \tag{2}$$

et si on développe en série la fonction de $\frac{r_k}{a_k}$, on a

(3) $$\frac{1}{\pi} = a_k (A + Bu + Cu^2 + \ldots)$$

Pour $k = \infty$, a_k tend vers $\frac{1}{\pi}$, $\frac{r_k}{a_k}$ vers 1, et par suite u vers zéro, de sorte que la relation précédente devient

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot A, \quad \text{d'où} \quad A = 1.$$

Pour déterminer les autres coefficients B, C,..., nous observerons que, si l'on pose

(4) $$\frac{r_{k+1}}{a_{k+1}} = 1 + u',$$

on a, de même,

(5) $$\frac{1}{\pi} = a_{k+1} (A + Bu' + Cu'^2 + \ldots).$$

Or les relations (1), (2), (4) donnent

$$a_{k+1} = a_k \left(1 + \frac{u}{2}\right), \qquad u' = \frac{u}{4} - \frac{5}{2}\left(\frac{u}{4}\right)^2 + \ldots,$$

et en portant ces valeurs dans (5), puis comparant les coefficients des mêmes puissances de u dans (5) et (3), on trouve

$$B = \frac{2}{3}, \qquad C = -\frac{1}{45}, \ldots$$

On a donc

$$\frac{1}{\pi} = a_k \left[1 + \frac{2}{3} u - \frac{1}{45} u^2 + \ldots\right]$$

et par suite, d'après une propriété connue des séries à termes alternativement positifs et négatifs,

$$\frac{1}{\pi} = a_k \left(1 + \frac{2}{3} u\right) = \frac{a_k + 2 r_k}{3}$$

avec une erreur moindre que

$$\frac{a_k . u^2}{45} \quad \text{ou que} \quad \frac{(r_k - a_k)^2}{45 . a_k}.$$

Supposons k assez grand pour que cette dernière quantité soit moindre que $\frac{1}{2 . 10^m}$, et désignons par α et ρ des valeurs approchées de a_k et de r_k à moins de $\frac{1}{2 . 10^m}$; $\frac{1}{\pi}$ différant de $\frac{1}{3}(a_k + 2 r_k)$ de moins de $\frac{1}{2 . 10^m}$, et cette dernière quantité différant à son tour de $\frac{1}{3}(\alpha + 2\rho)$ de moins de $\frac{1}{2 . 10^m}$, on a, à moins de $\frac{1}{10^m}$,

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3}(\alpha + 2\rho).$$

De là ce théorème.

Si l'on prend k assez grand pour que la quantité

$$\frac{(r_k - a_k)^2}{45 . a_k}$$

soit moindre que $\frac{1}{2.10^m}$, *et si* α *et* ρ *sont des valeurs approchées de* a_k *et de* r_k *à moins de* $\frac{1}{2.10^m}$, *l'expression*

$$\frac{1}{3}(\alpha + 2\rho)$$

est une valeur approchée de $\frac{1}{\pi}$ *à moins de* $\frac{1}{10^m}$.

Par exemple, en s'arrêtant au polygone de 64 côtés, on a, d'après le tableau précédent,

$$\frac{(r_s - a_s)^2}{45 . a_s} < \frac{1}{2.10^7}, \qquad \alpha = 0,3180542, \quad \rho = 0,3184377.$$

On en déduit

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3}(\alpha + 2\rho) = 0,318099,$$

a moins de $\frac{1}{10^7}$ et, par suite,

$$\pi = 3,14159 3,$$

à moins de $\frac{1}{10^6}$.

---

§ V.

Programme officiel : *Angles trièdres. — Cas d'égalité et de symétrie. — Propriétés de l'angle trièdre supplémentaire. — Limites de la somme des angles dièdres d'un trièdre. — Analogies et différences entre les angles trièdres et les triangles rectilignes.*

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

533. Nous avons, dans le § V du livre V, défini les angles trièdres et polyèdres, les angles polyèdres symétriques, et démontré les deux théorèmes suivants :

Dans tout angle polyèdre, une face quelconque est moindre que la somme des autres.

Dans tout angle polyèdre convexe, la somme des faces est moindre que quatre angles droits.

Nous allons compléter ici l'étude des trièdres; mais avant d'aborder de nouvelles propriétés, il importe de revenir sur les trièdres symétriques et d'exposer quelques conséquences

fondamentales des deux propositions que nous venons de rappeler.

534. Considérons deux angles trièdres symétriques SABC, SA′B′C′ (*fig.* 308), et supposons, pour fixer les idées, que l'arête SC soit en avant du plan ASB, et, par suite, que son prolongement SC′ soit en arrière du même plan.

Fig. 308.

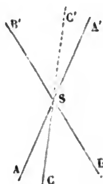


Fig. 309.

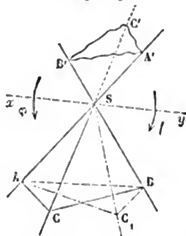
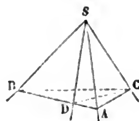


Fig. 310.



Menons (*fig.* 309) la bissectrice xSy de l'angle BSA′, et autour de cette droite, qui est située dans le plan ASB, faisons tourner le trièdre SA′B′C′ de 180 degrés dans le sens de la flèche φ. L'arête SA′ s'appliquera sur SB, l'arête SB′ sur SA, et par suite la face A′SB′ coïncidera avec BSA. De plus, l'arête SC′ viendra bien en avant du plan ASB; mais la nouvelle position SC_1 de cette arête différera en général de SC; car les dièdres suivant SA et SB étant en général inégaux, il en sera de même des dièdres SB et SA′, et par suite les plans CSB et C_1SB, étant inégalement inclinés sur le plan ASB, ne coïncideront pas.

On voit cependant que la coïncidence aurait lieu si le trièdre SABC avait les deux angles dièdres SA et SB égaux entre eux. Car, dans cette hypothèse, les plans C_1SB et CSB seraient également inclinés sur le plan ASB; ils tomberaient donc l'un sur l'autre; il en serait de même des plans C_1SA et CSA, et par suite les arêtes SC et SC_1 se confondraient. Observons d'ailleurs que la face C′SA′, qui est égale à ASC, s'applique alors sur CSB, de sorte que l'égalité des deux angles dièdres SA et SB entraîne celle des faces CSB et CSA. Donc, en résumé, *pour qu'un trièdre soit superposable à son symétrique, il faut et il suffit que ce trièdre ait deux angles dièdres égaux; et dans un tel trièdre, les faces opposées aux dièdres égaux sont égales.*

535. *Dans tout angle trièdre, à un plus grand angle dièdre est opposée une plus grande face.*

Soit (*fig.* 310) le trièdre SABC dans lequel l'angle dièdre SC est plus grand que l'angle dièdre SB. On pourra mener dans le dièdre SC et par l'arête SC un plan CSD qui fasse, avec le plan CSB, un angle dièdre égal au dièdre SB. Le trièdre SBCD ayant deux dièdres égaux, les faces BSD, CSD, opposées à ces angles, seront égales (534). Or le trièdre SACD (353) donne

$$\mathrm{ASC} < \mathrm{ASD} + \mathrm{DSC};$$

on aura donc, en remplaçant la face DSC par son égale DSB,

$$\mathrm{ASC} < \mathrm{ASD} + \mathrm{DSB} \quad \text{ou} \quad \mathrm{ASC} < \mathrm{ASB}.$$

En rapprochant ce théorème de celui qui a été démontré au dernier alinéa du n° 534, et en raisonnant comme au n° 36, on verra que : RÉCIPROQUEMENT, *si un angle trièdre a deux faces égales, les dièdres opposés à ces faces sont égaux, et si un angle trièdre a deux faces inégales, à la plus grande face est opposé le plus grand dièdre.*

536. Il résulte des deux théorèmes rappelés au commencement de ce paragraphe que, pour qu'on puisse former un angle trièdre avec trois faces données, *il faut* que la plus grande face soit inférieure à la somme des deux autres, et que la somme des trois faces soit moindre que quatre angles droits. Nous allons prouver que ces deux conditions sont *suffisantes.*

Soient (*fig.* 311) ASB la plus grande face, et ASC, B C', les deux autres rabattues dans le plan de la première, de part et d'autre de celle-ci; SC et SC' sont les deux droites provenant du dédoublement de la troisième arête.

Décrivons du point S comme centre un arc de cercle CC' de rayon arbitraire; cet arc sera moindre qu'une circonférence, puisque la somme des trois faces données est inférieure à quatre angles droits. Cc et C'c' étant les cordes menées des points C et C' perpendiculairement aux arêtes SA et SB, les arcs AC et Ac sont égaux entre eux, ainsi que les arcs BC' et Bc'; par suite, la relation

$$\text{arc AB} < \text{arc AC} + \text{arc BC}',$$

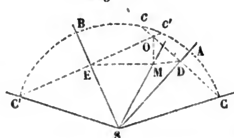
qui exprime que la plus grande face ASB est inférieure à la

somme des deux autres, peut s'écrire

$$\text{arc AB} < \text{arc A}c + \text{arc B}c';$$

elle montre que le point c tombe entre B et c', que c' tombe entre c et A, et par conséquent que les deux cordes Cc et C$'c'$ se croisent en un point O intérieur au cercle CC$'$.

Fig. 311.



Élevons au point O la perpendiculaire OM au plan ASB, et dans le plan DOM décrivons du point D comme centre, avec un rayon égal à DC, un arc de cercle qui coupera nécessairement la perpendiculaire OM, puisque OD est moindre que DC. M étant le point d'intersection, menons SM, le trièdre SABM sera formé avec les trois faces données. En effet, si l'on tire MD et ME, ces droites seront respectivement perpendiculaires sur SA et SB, en vertu du théorème des trois perpendiculaires; dès lors les deux triangles SDM, SDC, sont égaux comme ayant un angle droit compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; on en conclut d'abord que la face ASM est égale à la face donnée ASC, et que l'arête SM est égale à SC. Les deux triangles rectangles SME, SC$'$E, ont donc l'hypoténuse égale et un côté commun, et leur égalité prouve que la face MSB est égale à l'autre face donnée BSC$'$.

THÉORÈME.

537. *Si un angle trièdre* SA$'$B$'$C$'$ *est le trièdre supplémentaire d'un angle trièdre donné* SABC, *réciproquement* SABC *sera le trièdre supplémentaire de* SA$'$B$'$C$'$ (*fig.* 312).

Pour bien comprendre la définition du trièdre supplémentaire et l'objet du présent théorème, il convient de faire une remarque. Par un point O d'un plan P, menons une perpendiculaire M à ce plan et une oblique ON. Si les deux droites OM et ON *sont d'un même côté du plan* P, l'angle MON qu'elles forment est *aigu* (*fig.* 312), car il est compris dans l'un des angles droits MOT ou MOT$'$ que fait la perpendiculaire OM

avec la trace TOT′ du plan MON sur le plan P. Si les deux droites OM et ON sont *situées de part et d'autre* du plan P, l'angle MON est *obtus* (*fig.* 313), car il contient l'un des an-

Fig. 312.

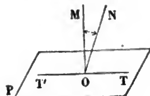


Fig. 313.

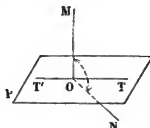
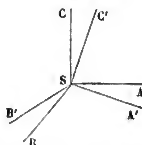


Fig. 314.



gles MOT ou MOT′. Donc, réciproquement, suivant que l'angle MON est aigu ou obtus, on peut affirmer que la perpendiculaire OM et l'oblique ON sont d'un même côté du plan P ou de part et d'autre de ce plan,

Cela posé, on nomme trièdre supplémentaire d'un trièdre SABC (*fig.* 314) un nouveau trièdre SA′B′C′ formé de la manière suivante :

Par le sommet S, on élève une perpendiculaire SC′ à la face ASB, du même côté que SC par rapport au plan de cette face; on mène SB′ perpendiculaire à la face ASC, du même côté que SB par rapport au plan ASC, et l'on trace enfin SA′ perpendiculaire à la face BSC et du même côté que SA par rapport au plan BSC.

Il s'agit maintenant de démontrer que le trièdre SABC résulte du trièdre SA′B′C′, comme celui-ci du premier; ou, en d'autres termes, que l'arête SC, par exemple, est perpendiculaire à la face A′SB′ et du même côté que SC′ par rapport au plan de cette face. Or, par hypothèse, SA′ est perpendiculaire au plan CSB et par suite à SC; de même, SB′ est perpendiculaire à SC; donc SC est perpendiculaire au plan A′SB′. De plus, SC′ ayant été mené perpendiculairement au plan ASB et du côté de SC, l'angle CSC′ est aigu; par suite, la perpendiculaire SC au plan A′SB′ et l'oblique SC′ formant un angle aigu, ces deux droites sont situées d'un même côté par rapport à ce plan A′SB′.

THÉORÈME.

538. *Si* SABC *et* SA′B′C′ *sont deux trièdres supplémentaires, chaque angle dièdre de l'un de ces trièdres est le supplément de la face opposée dans l'autre trièdre* (*fig.* 314).

La démonstration est fondée sur la remarque suivante :

Lorsque, par un point O *pris sur l'arête d'un angle dièdre* OI, *on élève sur la face* IOA *une perpendiculaire* OA′ *du même côté du plan* IOA *que la face* IOB, *et sur la face* IOB *une perpendiculaire* OB′ *du même côté du plan* IOB *que la face* IOA, *l'angle* A′OB′ *est le supplément de l'angle plan* AOB *qui mesure le dièdre* OI (*fig.* 315 et 316).

Fig. 314.

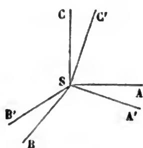


Fig. 315.

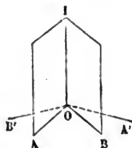
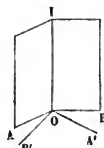


Fig. 316.



Les quatre droites OA, OB, OA′, OB′, sont dans le plan perpendiculaire à OI mené par O (319); d'ailleurs, OA′ perpendiculaire au plan IOA doit être perpendiculaire à OA, et de même OB′ doit être perpendiculaire sur OB; les angles AOB, A′OB′, sont donc deux angles situés dans un même plan et ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun; pour prouver qu'ils sont supplémentaires, il suffit (70) de prouver qu'ils sont toujours d'espèce différente, c'est-à-dire l'un aigu, l'autre obtus. Or cela résulte de la direction que l'énoncé impose aux perpendiculaires OA′ et OB′. En effet, si l'angle AOB est aigu (*fig.* 315), l'angle A′OB′ renferme l'angle droit AOA′ et, par suite, est obtus ; si l'angle AOB est obtus (*fig.* 316), l'angle A′OB′ est contenu dans l'angle droit AOA′ et, par suite, est aigu.

Cela posé, revenons aux trièdres supplémentaires SABC, SA′B′C′ (*fig.* 314), et considérons, par exemple, le dièdre SC. La droite SB′ est une perpendiculaire à la face CSA de ce dièdre du côté de SB, et par suite du côté de l'autre face CSB; de même, SA′ est une perpendiculaire à la face CSB du dièdre, du côté de la face CSA; donc, l'angle A′SB′ est le supplément de l'angle qui mesure le dièdre SC ou, plus brièvement, le supplément du dièdre SC. On procéderait de même pour les dièdres SA et SB.

Puisque les deux trièdres SABC, SA′B′C′, se déduisent l'un de l'autre par la même construction (537), il est clair que la

propriete qui vient d'être établie pour les dièdres du premier s'étend aux dièdres du second. D'ailleurs, la démonstration serait la même.

C'est en raison de cette double propriété que les deux trièdres ont été appelés *supplémentaires*.

SCOLIE.

539. Désignons par a, b, c, les nombres qui mesurent les faces, et par A, B, C, les nombres qui mesurent les angles dièdres d'un angle trièdre, l'angle droit étant pris pour unité d'angle. Les nombres a', b', c', qui mesureront les faces, et ceux A', B', C', qui mesureront les dièdres du trièdre supplémentaire, seront donnés par les formules

$$a' = 2 - A, \qquad A' = 2 - a,$$
$$b' = 2 - B, \qquad B' = 2 - b,$$
$$c' = 2 - C, \qquad C' = 2 - c.$$

Si donc on connaît une propriété quelconque d'un angle trièdre, c'est-à-dire une relation entre les éléments a, b, c, A, B, C, de cette figure, en appliquant cette relation aux éléments a', b', c', A', B', C', du trièdre supplémentaire, puis en remplaçant ces éléments par leurs valeurs tirées des formules précédentes, on aura une relation nouvelle entre a, b, c, A, B, C, c'est-à-dire une nouvelle propriété du trièdre primitif.

De même, toute propriété relative à plusieurs trièdres *conduira,* par la considération des trièdres supplémentaires des proposés, à une propriété nouvelle de ce système de trièdres.

On conçoit par là l'importance du théorème précédent. Voici d'ailleurs quelques applications de la méthode générale que nous venons d'indiquer.

540. Nous avons vu (354) que la somme des faces d'un trièdre était toujours comprise entre zéro et quatre angles droits. Cherchons le théorème correspondant, ou, comme on dit, le théorème *corrélatif*. Considérons à cet effet le trièdre supplémentaire du proposé; a', b', c', étant ses faces, on a

$$0 < a' + b' + c' < 4.$$

Par suite A, B, C, étant les dièdres du trièdre proposé, on a

$$0 < (2 - A) + (2 - B) + (2 - C) < 4,$$

ou

$$6 > A + B + C > 2.$$

Ainsi, la proposition demandée est la suivante : *Dans tout trièdre, la somme des angles dièdres est comprise entre deux droits et six droits.*

Nous avons vu encore (353) que dans tout trièdre la plus grande face est moindre que la somme des deux autres. Quel est le théorème corrélatif?

Soient a', b', c', les faces du trièdre supplémentaire du trièdre considéré. a' étant la plus grande, on a

$$a' < b' + c';$$

par suite, si A, B, C, sont les dièdres du trièdre proposé, on aura

$$2 - A < (2 - B) + (2 - C), \quad \text{ou} \quad A + 2 > B + C.$$

D'ailleurs, le supplément d'un angle diminuant quand cet angle augmente, A doit être le plus petit des dièdres A, B, C, puisque a' est la plus grande des faces a', b', c'. Donc enfin la proposition demandée est la suivante : *Dans tout trièdre, le plus petit angle dièdre, augmenté de deux droits, est plus grand que la somme des deux autres.*

541. En résumé (540), pour qu'on puisse former un angle trièdre avec trois dièdres donnés A, B, C, *il faut* que leur somme soit comprise entre deux droits et six droits, et que le plus petit augmenté de deux droits soit supérieur à la somme des deux autres.

Ces conditions sont *suffisantes ;* car, quand elles sont remplies, les suppléments a', b', c', des angles donnés A, B, C, satisfont aux deux conditions du n° 536. On peut donc, avec les trois faces a', b', c', construire un trièdre; par suite, en construisant le trièdre supplémentaire de celui-là, on aura un trièdre dont les dièdres seront les angles donnés A, B, C.

THÉORÈME.

542. *Deux angles trièdres sont égaux :*

1° *Lorsqu'ils ont une face égale adjacente à deux angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés ;*

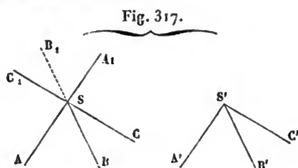
2° *Lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune et semblablement disposées ;*

3° *Lorsqu'ils ont leurs faces égales chacune à chacune et semblablement disposées*

4° *Lorsqu'ils ont leurs angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

1° Soient les deux trièdres SABC et S'A'B'C' (*fig.* 317). Par hypothèse, la face ASB est égale à la face A'S'B', les angles dièdres SA et S'A' sont égaux entre eux, ainsi que les dièdres SB et S'B'. On suppose en outre que la disposition est la même, c'est-à-dire que si un observateur dont la tête est en S, le dos appuyé sur la face ASB, et le regard dirigé vers SC, a l'arête SA à sa gauche et l'arête SB à sa droite, un autre observateur, dont la tête serait en S', le dos appuyé sur la face A'S'B' et le regard dirigé vers S'C', aurait l'arête S'A' à sa gauche et l'arête S'B' à sa droite.

Fig. 317.



Dans ces conditions, les deux trièdres sont égaux, c'est-à-dire superposables. En effet, si l'on place la face A'S'B' sur son égale ASB, de façon que S'A' coïncide avec SA et S'B' avec SB, l'arête S'C' tombe, par rapport au plan ASB, du même côté que SC, sans quoi la disposition des éléments serait différente dans les deux trièdres. Alors, les dièdres SA et S'A' étant égaux, le plan A'S'C' s'applique sur le plan ASC; de même, les dièdres SB et S'B' étant égaux, le plan B'S'C' s'applique sur le plan BSC; donc enfin les arêtes S'C' et SC se confondent et les deux trièdres coïncident.

2° Le second cas résulte du précédent, dont il est *corrélatif* (540). En effet, les deux trièdres supplémentaires des proposés ont une face égale adjacente à deux dièdres respectivement égaux et semblablement disposés; ils sont donc superposables, et par suite il en est de même des trièdres primitifs.

D'ailleurs, la démonstration directe n'offre aucune difficulté; on voit, par un raisonnement analogue au précédent (1°), que la superposition est possible, si, conformément à l'hypothèse, la disposition des éléments est la même.

3° Pour le troisième cas, on pourrait suivre une marche iden-

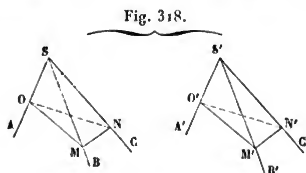
tique à celle de la Géométrie plane, c'est-à-dire démontrer ce théorème comme celui du n° 33 (3°), en passant par les propositions qui sont les analogues de celle des n°s 32 et 33 (2°).

Voici une démonstration directe :

Soient SABC et S'A'B'C' les deux trièdres; il suffit évidemment de démontrer l'égalité de deux dièdres homologues, des dièdres SA et S'A', par exemple.

Supposons d'abord que les deux faces ASB, ASC, qui comprennent le dièdre SA, soient deux angles aigus. En un point quelconque O de l'arête SA, formons (*fig.* 318) l'angle plan correspondant à l'angle dièdre SA ; en d'autres termes, élevons par le point O des perpendiculaires sur SA dans les plans ASB et

Fig. 318.



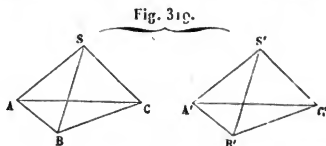
ASC ; les angles ASB et ASC étant aigus, ces perpendiculaires rencontreront les arêtes SB et SC en deux points M et N que nous joindrons par une ligne droite. Prenons S'O' = SO et construisons de même en O' l'angle plan M'O'N' du dièdre S'A'. Il s'agit de démontrer l'égalité des deux angles plans MON et M'O'N'. Or les deux triangles rectangles SOM, S'O'M', sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux : il en est de même des triangles SON et S'O'N'; par suite, les deux triangles SMN, S'M'N', ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, et enfin les deux triangles OMN, O'M'N', ont les trois côtés égaux chacun à chacun. L'égalité de ces derniers triangles entraîne celle des deux angles MON, M'O'N'.

Supposons en second lieu que les deux angles ASB et ASC, qui comprennent le dièdre SA, soient quelconques, et prenons six longueurs égales SA = SB = SC = S'A' = S'B' = S'C', à partir des sommets sur les arêtes des deux trièdres (*fig.* 319).

Les triangles isocèles ASB et A'S'B', BSC et B'S'C', CSA et C'S'A', sont égaux deux à deux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux; par suite, les triangles ABC,

A′B′C′, sont égaux comme ayant les trois cotés égaux chacun à chacun. D'après cela, les deux trièdres A et A′ ont leurs

Fig. 319.



faces respectivement égales ; d'ailleurs les angles SAB, SAC, qui comprenent le dièdre AS, sont aigus comme angles à la base de triangles isocèles; donc, en vertu du raisonnement fait dans l'alinéa précédent, le dièdre AS est égal au dièdre A′S′.

4° Le dernier cas résulte du précédent dont il est le *corrélatif.* En effet, les deux trièdres supplémentaires des proposés ont leurs faces respectivement égales et semblablement disposées ; ils sont donc superposables, et par suite il en est de même des trièdres primitifs.

Scolie.

543. Si, dans chacun des quatre cas examinés, la disposition des éléments égaux était différente dans les deux trièdres, il n'y aurait plus *égalité*, mais seulement *symétrie.* En effet, soient T et T′ les deux trièdres proposés, et T_1 le symétrique de T′, c'est-à-dire celui qu'on déduit de T′ en prolongeant ses arêtes au delà du sommet. Les trièdres T′ et T_1 ont leurs éléments égaux et inversement disposés; par suite, comme T et T′ remplissent par hypothèse toutes les conditions de l'un des cas d'égalité sauf celle relative à la disposition des parties égales, les trièdres T et T_1 satisferont à toutes les conditions de ce cas d'égalité; ils seront donc superposables; d'où l'on voit que T est superposable au symétrique de T′.

544. Nous avons suffisamment signalé dans le courant de ce paragraphe l'analogie entre certaines propriétés des trièdres et des triangles rectilignes. Il importe toutefois d'observer en terminant que si, à toute propriété des triangles répond une propriété des trièdres, la réciproque n'est pas vraie ; par exemple, tandis que l'égalité des angles dièdres de deux trièdres entraîne l'égalité de leurs faces, l'égalité des angles de deux triangles n'entraîne que la proportionnalité des côtés.

§ VI.

Programme officiel : *De la symétrie dans les polyèdres; plan de symétrie; centre de symétrie. — Comparaison des faces, des angles dièdres, des angles polyèdres homologues de deux polyèdres symétriques. — Équivalence de leurs volumes.*

DÉFINITIONS.

545. Deux points A et A′ sont *symétriques par rapport à un centre* O, lorsque ce centre O est le milieu de la droite AA′ (*fig.* 320).

Deux points A et A′ sont symétriques par rapport à un axe xy (*fig.* 321), ou à un plan P (*fig.* 322), lorsque cet axe ou ce plan est perpendiculaire au milieu de la droite AA′.

Fig. 320.



Fig. 321.

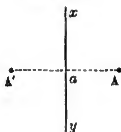
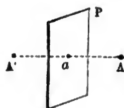


Fig. 322.



Deux figures sont symétriques par rapport à un centre, à un axe ou à un plan, lorsque leurs points sont deux à deux symétriques par rapport à ce centre, à cet axe ou à ce plan. Les points symétriques des deux figures sont dits *homologues*.

546. *Deux figures symétriques, par rapport à un axe, sont égales.* Car une rotation de 180 degrés autour de l'axe, imprimée à l'une des deux figures, amène évidemment cette figure sur l'autre.

La symétrie, par rapport à un axe, n'offre donc rien de particulier. Aussi, dans la suite de ce paragraphe, ne sera-t-il question que de la symétrie relative à un point ou à un plan.

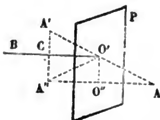
THÉORÈME.

547. *Deux figures* F′ *et* F″, *symétriques d'une même figure* F *par rapport à deux centres différents* O′ *et* O″, *sont égales* (*fig.* 323) (*).

(*) Bravais, *Journal de Mathématiques*, t. XIV.

Soient A un point quelconque de la figure F, A′ son homologue dans la figure F′ et A″ son homologue dans la figure F″.

Fig. 323.



O′ étant le milieu de AA′ et O″ le milieu de AA″, la droite A′A″ est parallèle à O′O″ et égale à 2O′O″. La figure F″ n'est donc que la figure F′ transportée parallèlement à la direction O′O″, d'une quantité égale à 2O′O″.

Corollaire.

548. La position du centre de symétrie n'influe ni sur la *forme* ni même sur l'*orientation* de la figure symétrique d'une figure donnée.

THÉORÈME.

549. *Si deux figures* F *et* F″ *sont symétriques par rapport à un plan* P, *on peut toujours les placer de telle sorte qu'elles soient symétriques par rapport à un centre* O′ *pris à volonté dans ce plan;* et réciproquement, *si deux figures* F *et* F′ *sont symétriques par rapport à un centre* O′, *on peut toujours les placer de telle sorte qu'elles soient symétriques par rapport à un plan quelconque* P *passant par ce centre* (*fig.* 323) (*).

Il suffit de faire tourner la figure F″ dans le premier cas, la figure F′ dans le second, de 180 degrés autour de la perpendiculaire O′CB élevée en O′ au plan P.

En effet, considérons une figure F, un plan P, et un point quelconque O′ de ce plan; soient F′ la figure symétrique de F par rapport au point O′, et F″ la figure symétrique de F par rapport au plan P. Le théorème direct et sa réciproque seront démontrés à la fois, si l'on fait voir que les figures F′ et F″ sont symétriques par rapport à la perpendiculaire O′B élevée en O′ au plan P (546). Or, soient A, A′, A″, trois points homo-

(*) Bravais, *Journal de Mathématiques*, t. XIV.

logues des figures F, F′, F″, et O″ le point où la droite AA″ rencontre le plan P. O′ étant le milieu de AA′ et O″ le milieu de AA″, la droite A′A″ est parallèle à O′O″, et, par suite, perpendiculaire sur O′B. D'ailleurs, O′B étant menée parallèlement à AA″ par le milieu de AA′, passe par le milieu C de A′A″. Donc enfin, les points A′ et A″ sont symétriques par rapport à la droite O′B.

COROLLAIRES.

550. Deux figures symétriques d'une même figure F, par rapport à deux plans différents P et Q, ne sont autre chose, quant à la *forme*, que la figure symétrique de F par rapport à un centre quelconque (547); elles sont donc superposables. Mais leur *orientation* dans l'espace n'est pas la même, à moins que les plans P et Q ne soient parallèles.

551. En résumé (547, 550), si l'on fait abstraction de l'orientation pour n'avoir égard qu'à la forme, on voit qu'*une figure* F *n'a qu'une seule figure symétrique.* Toutes les figures obtenues en prenant la figure symétrique de F, par rapport à tel centre ou à tel plan qu'on veut, sont superposables.

SCOLIE.

552. Telle propriété de deux figures *symétriques* (545) est plus ou moins aisée à démontrer, suivant que l'on considère la symétrie relative à un plan ou à un centre. Le théorème précédent (549) permet de choisir le mode de symétrie qui facilite le plus les raisonnements. C'est généralement la symétrie relative à un centre qui rend les démonstrations plus simples, parce qu'en déplaçant le centre de symétrie on n'altère pas même l'orientation de la figure symétrique (548).

THÉORÈME.

553. *La figure symétrique d'une ligne droite est une ligne droite.*

Car, si l'on prend un point quelconque de la droite pour centre de symétrie, ce qui ne peut rien changer au résultat (548), on retrouve évidemment la droite elle-même pour figure symétrique.

COROLLAIRES.

554. *La distance de deux points est égale à celle de leurs symétriques.*

Car, si l'on prend pour centre de symétrie le milieu de la droite qui joint les deux points, on voit que ces deux points ne font que s'échanger.

555. *L'angle de deux droites est égal à l'angle de leurs symétriques.*

Car, en prenant pour centre de symétrie le sommet de cet angle, on voit que les droites symétriques forment l'angle qui lui est opposé par le sommet.

SCOLIE.

556. Il importe de se figurer nettement la situation de deux droites symétriques par rapport à un centre ou par rapport à un plan.

Fig. 324.

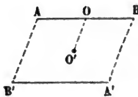
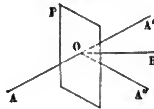


Fig. 325.



Soit AB (*fig.* 324) une droite dont on veut la droite symétrique par rapport à un centre donné O'. Prenons d'abord la droite symétrique de AB par rapport à son milieu O : le point A aura son symétrique en B, et le point B son symétrique en A ; de sorte que la droite symétrique de AB, par rapport à son milieu O pris pour centre, sera BA, Dès lors, pour passer du centre O au centre O', il suffira (547) de faire décrire aux points B et A des droites BA' et AB' parallèles à OO' et doubles de OO'. On trouve ainsi, pour symétrique de AB, la droite A'B' *parallèle à* AB, *de sens contraire, et située à la même distance du centre* O' *de symétrie.*

Soit OA (*fig.* 325) une droite dont on veut la droite symétrique par rapport à un plan P qu'elle rencontre en O. En prenant d'abord la droite symétrique de OA par rapport au point O, on trouve son prolongement OA', et il suffit (549) de faire

tourner OA′ de 180 degrés autour de la perpendiculaire OB au plan P pour avoir la droite OA″ demandée. On voit que *les deux droites* OA *et* OA″, *symétriques par rapport au plan* P, *sont également inclinées sur ce plan, qu'elles rencontrent d'ailleurs au même point* O.

THÉORÈME.

557. *La figure symétrique d'un plan est un plan.*

Car, si l'on prend un point du plan pour centre de symétrie, on retrouve évidemment le plan lui-même pour figure symétrique.

COROLLAIRES.

558. *La figure symétrique d'un polygone plan est un polygone égal au premier.*

D'abord, c'est un polygone plan (557); il est ensuite égal au premier, parce qu'il a ses côtés et ses angles égaux aux côtés homologues et aux angles homologues de ce polygone (554, 555).

559. *L'angle de deux plans est égal à l'angle de leurs symétriques.*

Car, en prenant pour centre de symétrie un point de l'arête de l'angle dièdre donné, on voit que les plans symétriques de ses faces forment le dièdre qui lui est opposé par l'arête.

SCOLIE.

560. Deux plans symétriques par rapport à un centre sont parallèles et équidistants de ce centre.

Deux plans symétriques par rapport à un plan sont également inclinés sur ce plan, qu'ils coupent d'ailleurs suivant la même droite.

THÉORÈME.

561. *Deux polyèdres symétriques ont : 1° leurs faces égales chacune à chacune ; 2° leurs angles dièdres homologues égaux ; 3° leurs angles polyèdres homologues symétriques* (352).

1° L'égalité des faces homologues résulte du n° 558.

2° L'égalité des angles dièdres homologues résulte du n° 559.

3° Pour montrer clairement la relation qui existe entre un angle polyèdre A de la première figure P et l'angle polyèdre homologue A′ de la seconde figure P′, il suffit de construire la figure symétrique de P (551) en prenant pour centre de symétrie le sommet A du premier angle polyèdre. On voit ainsi que l'angle polyèdre A′ est l'angle polyèdre opposé par le sommet à l'angle polyèdre A.

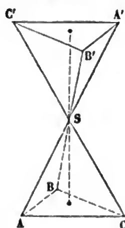
THÉORÈME.

562. *Deux polyèdres symétriques* P *et* P′ *sont équivalents.*

Si l'on décompose le polyèdre P en tétraèdres, à chacun de ces tétraèdres répondra un tétraèdre symétrique, et l'ensemble de ces tétraèdres symétriques formera le polyèdre P′. Deux polyèdres symétriques P et P′ étant d'après cela composés d'un même nombre de tétraèdres symétriques deux à deux, il suffit de démontrer que deux tétraèdres symétriques sont équivalents.

Or, soit (*fig.* 326) SABC un tétraèdre quelconque. Formons son symétrique SA′B′C′ par rapport au point S. Les triangles ABC, A′B′C′ sont égaux (558), et leurs plans sont équidistants du point S (560). Par suite, les deux tétraèdres SABC, SA′B′C′, ayant des bases et des hauteurs égales, sont équivalents.

Fig. 326.



SCOLIE.

563. Les deux prismes dans lesquels un parallélipipède est décomposé par un plan diagonal (380) sont évidemment symétriques par rapport au centre O du parallélipipède (*fig.* 229). C'est pourquoi ils sont équivalents (562); mais ils ne sont superposables que quand ils sont droits.

§ VII.

Programme officiel : *Pôle de similitude de deux polyèdres semblables et semblablement placés.*

564. Étant donné un système de points A, B, C,..., situés d'une manière quelconque dans l'espace (*fig.* 294 et 295), si, sur les rayons SA, SB, SC...., issus d'un point S choisi à volonté, on prend à partir de ce point des segments SA′, SB′, SC′ ..., tels que

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \ldots = k,$$

k étant un nombre quelconque, on dit que le nouveau système de points A′, B′, C′,..., est *homothétique* au système primitif ABC.... Suivant que les points homologues A et A′, B et B′,..., sont situés d'un même côté ou de côtés différents par rapport au *centre* S *d'homothétie*, les deux systèmes ABC..., A′B′C′..., sont dits *homothétiques directs* ou *homothétiques inverses.*

La définition de l'homothétie est donc la même pour les figures de l'espace que pour les figures planes (506). Toutefois, il n'est plus vrai de dire ici, comme dans le plan, que l'homothétie inverse donne, abstraction faite de la position, les mêmes figures que l'homothétie directe; F étant une figure quelconque de l'espace, si l'on construit, à l'aide d'un centre S arbitraire, la figure homothétique directe F′ suivant le rapport k, et la figure homothétique inverse F_1 suivant le même rapport, les deux figures F′ et F_1 seront *symétriques* par rapport au point S (545). Or, on ne peut plus ici faire coïncider deux pareilles figures (561), tandis que dans le plan une rotation de 180 degrés autour du point S entraînerait la coïncidence (506).

565. Le théorème du n° 507 et sa démonstration subsistent. *La figure homothétique d'une droite est une droite parallèle à la première, et l'angle de deux droites est égal à celui de leurs droites homologues* (508, 509).

La figure homothétique d'un plan est un plan parallèle au

premier, car si l'on considère dans le plan donné une droite qui tourne autour d'un point A, dans chacune de ses positions cette droite aura pour homothétique une droite parallèle passant par un point fixe A′ homothétique de A. Il résulte de là : 1° qu'*un plan qui passe par le centre d'homothétie est à lui-même son homothétique;* 2° que *l'angle de deux plans est égal à l'angle de leurs homothétiques.*

Les tangentes en deux points homologues de deux courbes homothétiques sont parallèles, comme limites de sécantes parallèles. Par suite, *les plans tangents en deux points homologues de deux surfaces homothétiques sont parallèles.*

Deux systèmes sont homothétiques, s'il existe dans l'espace deux points O *et* O′ *tels, que les droites qui joignent le point* O *aux divers points du premier système, et les droites qui joignent le point* O′ *aux divers points du second système, soient parallèles et dans un même rapport* k*;* la démonstration est la même qu'au n° 511.

Il résulte de là que *deux sphères quelconques sont à la fois homothétiques directes et homothétiques inverses* (513); les deux centres d'homothétie divisent harmoniquement la ligne des centres des deux sphères; ces centres sont en outre les sommets des deux cônes qu'on peut circonscrire aux deux sphères. Lorsque les deux sphères sont tangentes, leur point de contact est un centre d'homothétie, *directe* si le contact est *intérieur, inverse* si le contact est *extérieur.*

La figure homothétique d'une sphère étant une sphère, et un cercle pouvant toujours être considéré comme l'intersection de deux sphères, on voit que *la figure homothétique d'une circonférence par rapport à un point quelconque de l'espace est une circonférence.*

Deux figures de l'espace sont *semblables* lorsque, par un déplacement convenable, on peut amener la seconde sur l'une des homothétiques directes de la première.

On comprend, d'après cela, pourquoi on donne, en général, les noms de centres ou pôles de similitude et de rapport de similitude aux centres et au rapport d'homothétie.

---

§ VIII.

PROGRAMME OFFICIEL : *Volume du tronc de prisme triangulaire.*

THÉORÈME.

566. *Un tronc de prisme triangulaire est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour base commune la base inférieure du tronc, et pour sommets, ceux de la base supérieure.*

Soit (*fig.* 327) le tronc de prisme triangulaire ABCDEF (376); soient EH, DK, FL, les perpendiculaires abaissées des sommets de la base supérieure sur le plan de la base inférieure.

Fig. 327.

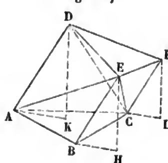
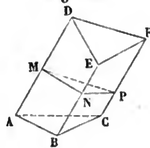


Fig. 328.



En menant un plan par les trois sommets A, E, C, puis un autre plan par les trois sommets D, E, C, on partage le tronc en trois pyramides triangulaires EABC, EDCF, EDCA.

La pyramide EABC a pour base la base inférieure ABC du tronc, et pour hauteur EH.

En prenant pour sommets des pyramides EDCF, EABC, les points D et A, on voit que ces pyramides sont entre elles comme leurs bases ECF, ECB. D'ailleurs ces triangles, compris entre les parallèles EB, FC, ont même hauteur et sont entre eux comme leurs bases FC, EB. Donc, les pyramides EDCF, EABC, sont entre elles comme les arêtes FC et EB, ou, à cause de la similitude des triangles rectangles EBH, FCL, comme les hauteurs EH et FL.

Les deux pyramides EDCA, EDCF, ayant même hauteur, sont aussi entre elles comme leurs bases DCA, DCF; ou comme les arêtes DA et FC, puisque les triangles DCA, DCF, compris entre es parallèles DA, FC, ont même hauteur; ou enfin, en vertu de la similitude des triangles rectangles DAK, FCL, comme les hauteurs DK et FL.

Les trois pyramides EABC, EDCF, EDCA, étant proportionnelles aux hauteurs EH, FL, DK, et le volume de la première étant

$$\frac{ABC.EH}{3},$$

les volumes des deux autres sont respectivement

$$\frac{ABC.FL}{3} \text{ et } \frac{ABC.DK}{3}.$$

SCOLIE.

567. Si le tronc considéré est un tronc de prisme droit, les hauteurs EH, FL, DK, se confondent avec les arêtes latérales EB, FC, DA, et la base ABC avec la section droite du tronc. Le volume du corps tronqué a donc alors pour mesure *le produit de sa section droite par la moyenne arithmétique de ses arêtes latérales.*

On étend facilement cet énoncé au cas du tronc de prisme oblique. Soit (*fig.* 328) le tronc de prisme oblique ABCDEF. Menons sa section droite MNP. Elle le partage en deux troncs de prisme MNPABC, MNPDEF, qui sont droits relativement à cette section considérée comme base. Le premier a pour mesure

$$MNP\left(\frac{MA+NB+PC}{3}\right);$$

le second,

$$MNP\left(\frac{MD+NE+PF}{3}\right).$$

Le tronc de prisme oblique ABCDEF, somme des deux troncs de prismes droits MNPABC, MNPDEF, a donc pour mesure la somme de leurs mesures, c'est-à-dire

$$MNP\left(\frac{AD+BE+CF}{3}\right).$$

---

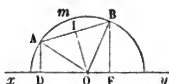
§ IX.

PROGRAMME OFFICIEL : *Volume du segment sphérique.*

THÉORÈME.

568. *Le volume engendré par un segment circulaire tournant autour d'un diamètre extérieur à sa surface, équivaut au sixième du cylindre qui a pour rayon la corde du segment et pour hauteur la projection de cette corde sur l'axe.*

Fig. 329.



Le segment AmB (*fig.* 329) est la différence du secteur circulaire OAB et du triangle isocèle AOB; la portion du volume de la sphère engendrée par la rotation de ce segment sera donc égale à la différence des volumes du secteur sphérique AOB et du triangle tournant AOB.

DF étant la projection de AB sur xy et OI la hauteur du triangle AOB, on aura (499, 497, 487)

$$\text{sect. sph. AOB} = \text{zone AB} \cdot \frac{OA}{3} = \frac{2}{3}\pi\overline{OA}^2 . DF,$$

$$\text{vol. AOB} = \text{aire AB} . \frac{OI}{3} = \frac{2}{3}\pi . \overline{OI}^2 . DF.$$

Par suite,

$$\text{vol. } AmB = \frac{2}{3}\pi\left(\overline{OA}^2 - \overline{OI}^2\right) . DF.$$

Le triangle rectangle OIA donnant

$$\overline{OA}^2 - \overline{OI}^2 = \overline{AI}^2 = \frac{\overline{AB}^2}{4},$$

il vient en réduisant

$$\text{vol. } AmB = \frac{1}{6} \cdot \pi\overline{AB}^2 . DF,$$

ce qui vérifie l'énoncé.

THÉORÈME.

569. *Le volume d'un segment sphérique équivaut au volume d'une sphère ayant pour diamètre la hauteur du segment, augmenté de la demi-somme des volumes de deux cylindres ayant pour hauteur commune celle du segment, et pour bases respectives les bases du segment.*

On appelle *segment sphérique* la portion du volume de la sphère comprise entre deux plans sécants parallèles. Les cercles déterminés par ces plans sont les *bases* du segment sphérique, et leur distance en est la *hauteur*.

Lorsque l'un des plans parallèles devient tangent à la sphère, le cercle correspondant se réduit à son pôle, et l'on a un segment sphérique *à une base*.

Le trapèze mixtiligne DAmBF (*fig.* 330) engendre un segment sphérique en tournant autour du diamètre xy. Ce segment est compris entre les plans parallèles déterminés par la rotation des perpendiculaires AD, BF, autour de xy; et il est

Fig. 330.

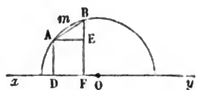
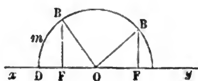


Fig. 331.



la somme des volumes engendrés par le segment circulaire AmB et le trapèze rectangulaire DABF. On a d'abord (568)

$$\text{vol. A}m\text{B} = \frac{1}{6}\pi\overline{\text{AB}}^2.\text{DF}.$$

Le trapèze DABF engendrant un tronc de cône de révolution, on a aussi (455)

$$\text{vol. DABF} = \frac{1}{3}\pi\,\text{DF}\left(\overline{\text{BF}}^2 + \overline{\text{AD}}^2 + \text{BF.AD}\right).$$

Par suite,

$$\text{vol. DA}m\text{BF} = \frac{1}{6}\pi.\text{DF}\left(\overline{\text{AB}}^2 + 2\overline{\text{BF}}^2 + 2\overline{\text{AD}}^2 + 2\text{BF.AD}\right).$$

D'ailleurs, la corde AB est liée à la hauteur DF et aux rayons BF et AD des bases du segment sphérique par la relation

$$\overline{\text{AB}}^2 = \overline{\text{AE}}^2 + \overline{\text{BE}}^2 = \overline{\text{DF}}^2 + (\text{BF} - \text{AD})^2$$

ou

$$\overline{AB}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{BF}^2 + \overline{AD}^2 - 2BF.AD.$$

En substituant cette valeur de $\overline{AB}^2$ et en simplifiant, il vient

$$\text{vol. DA}m\text{BF} = \frac{1}{6}\pi \text{DF}\left(\overline{DF}^2 + 3\overline{BF}^2 + 3\overline{AD}^2\right),$$

ce qu'on peut écrire

$$\text{vol. DA}m\text{BF} = \frac{1}{6}\pi\overline{DF}^3 + \frac{1}{2}\left(\pi\overline{BF}^2.\text{DF} + \pi\overline{AD}^2.\text{DF}\right),$$

de manière à vérifier l'énoncé (502, 434).

Si le segment considéré n'a qu'une base, c'est-à-dire si (*fig.* 331) le point D vient occuper l'une des extrémités du diamètre xy, on a simplement

$$\text{vol. D}m\text{BF} = \frac{1}{6}\pi\overline{DF}^3 + \frac{1}{2}\pi.\overline{BF}^2.\text{DF}.$$

Scolie.

570. Quand le segment sphérique n'a qu'une base (*fig.* 331), on peut exprimer son volume V en fonction de sa hauteur $\text{DF} = h$ et du rayon R de la sphère. On a alors, d'après la formule précédente,

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi\overline{BF}^2.h.$$

D'ailleurs (199),

$$\overline{BF}^2 = h(2R - h),$$

d'où

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h^2(2R - h)$$

ou, en simplifiant,

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right).$$

On peut trouver directement cette formule, en regardant le segment à une base comme la somme ou la différence du secteur sphérique terminé à la même calotte sphérique et du cône de révolution qui, ayant la même base que le segment, a son sommet au centre de la sphère. Le segment sphérique est la somme ou la différence des deux volumes indiqués, suivant qu'il est plus grand ou plus petit que la demi-sphère.

§ X.

Programme officiel : *Angle de deux arcs de grand cercle. — Notions sur les triangles sphériques; leur analogie parfaite avec les angles trièdres.*

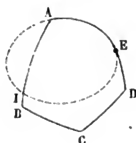
Propriétés du triangle polaire ou supplémentaire. — Aires du fuseau et du triangle sphérique. — Plus court chemin d'un point à un autre sur la sphère. (Mathématiques spéciales.)

DÉFINITIONS.

571. On nomme *angle de deux courbes* passant par un même point de l'espace l'angle de leurs tangentes en ce point. *L'angle de deux courbes tracées sur la sphère est* donc *égal à l'angle des plans menés respectivement par le centre de la sphère et par les tangentes à ces courbes au point commun;* car, ces tangentes étant perpendiculaires au rayon qui aboutit au point commun (465), leur angle mesure (340) le dièdre des deux plans considérés. En particulier, *l'angle de deux arcs de grand cercle est égal à l'angle des plans de ces arcs.*

572. On appelle *polygone sphérique* la portion de surface sphérique ABCDE comprise entre plusieurs arcs de grand cercle. Ces arcs AB, BC, CD, DE, EA, sont les *côtés* du polygone; les angles ABC, BCD,..., qu'ils forment, et les sommets B, C,... de ces angles sont les *angles*, et les *sommets* du polygone (*fig.* 332).

Fig. 332.



Un polygone sphérique est dit *convexe* lorsque chaque côté prolongé laisse tout le polygone dans le même hémisphère.

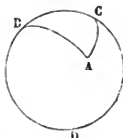
Chaque côté d'un polygone sphérique convexe est moindre

qu'une demi-circonférence de grand cercle. Car, si le côté AB, par exemple, était plus grand qu'une demi-circonférence, on pourrait prendre sur AB, entre A et B, un point I tel, que AI fût égal à une demi-circonférence; dès lors, le grand cercle auquel appartient le côté AE passerait par le point I (469), et le polygone ne serait pas tout entier dans l'un des deux hémisphères déterminés par ce grand cercle AE.

Un polygone sphérique convexe ne peut être rencontré en plus de deux points par un arc de grand cercle (72).

573. Le polygone sphérique le plus simple est le *triangle sphérique;* c'est la portion ABC de la surface de la sphère comprise entre trois arcs de grand cercle AB, BC, CA, *qui sont chacun moindres qu'une demi-circonférence.* D'après cela, un triangle sphérique est toujours convexe (*fig.* 333).

Fig. 333.



On pourrait admettre des côtés qui surpasseraient la demi-circonférence, et appeler encore triangle sphérique la figure formée par des arcs tels que AB, AC, BDC, dont le dernier est supérieur à une demi-circonférence. Mais d'abord cela serait incommode, parce que ces nouvelles figures présenteraient des angles tels que A qui surpasse deux angles droits; et ensuite cela est inutile, car la connaissance des éléments du triangle sphérique proprement dit ABC entraîne celle de tous les éléments de la figure formée par les arcs AB, AC, BDC.

Un triangle sphérique est *isocèle, équilatéral, rectangle,* dans les mêmes circonstances qu'un triangle rectiligne (26).

574. En joignant les sommets d'un triangle sphérique ABC (*fig.* 335) au centre O de la sphère, on forme un angle trièdre OABC, dont les faces AOB, BOC,..., ont la même mesure (126) que les côtés correspondants AB, BC,..., du triangle sphérique, et dont les angles dièdres OA, OB,..., ont la même mesure (571) que les angles A, B,... de ce triangle. La même

remarque s'étend à un polygone sphérique ABCD (*fig.* 334) et à l'angle polyèdre correspondant OABCD.

D'après cela, *à chaque propriété des angles trièdres ou polyèdres répond une propriété analogue des triangles ou polygones sphériques;* et pour énoncer cette propriété, il suffit de remplacer respectivement les mots *face* et *angle dièdre* par les mots *côté* et *angle*.

Fig. 334.

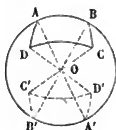
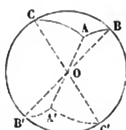


Fig. 335.



575. Si on prolonge les arêtes de l'angle polyèdre OABCD (*fig.* 334) au delà du sommet O, on forme un angle polyèdre symétrique OA'B'C'D', qui détermine sur la surface de la sphère un polygone A'B'C'D'. Les deux polygones ABCD, A'B'C'D', dont les sommets sont ainsi diamétralement opposés deux à deux, sont appelés *polygones sphériques symétriques.* Les considérations développées aux n°s 352 et 534 conduisent aux propriétés suivantes :

1° *Deux polygones symétriques ont leurs angles et leurs côtés égaux deux à deux; 2° ces polygones ne sont pas en général superposables, attendu que les parties respectivement égales sont disposées dans un ordre inverse; 3° pour qu'un triangle sphérique soit superposable à son symétrique, il faut et il suffit qu'il ait deux angles égaux, et dans un tel triangle les côtés opposés aux angles égaux sont égaux;* en d'autres termes, ce triangle est *isocèle*.

576. *Dans tout polygone sphérique, un côté quelconque est moindre que la somme de tous les autres* (353).

577. *Dans tout triangle sphérique, à un plus grand angle est opposé un plus grand côté. Si un triangle sphérique est isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux, et si un triangle sphérique a deux côtés inégaux, au plus grand côté est opposé le plus grand angle* (535).

578. *Dans un polygone sphérique convexe, la somme des côtés est moindre qu'une circonférence de grand cercle* (354).

579. *Dans tout triangle sphérique, la somme des angles est comprise entre deux et six angles droits, et le plus petit angle augmenté de deux droits surpasse la somme des deux autres* (540). Il résulte de là qu'un triangle sphérique peut avoir un, deux ou trois angles droits. Quand le triangle est *birectangle*, le sommet de l'angle qui n'est pas droit est le pôle du côté opposé, et les côtés qui comprennent cet angle sont des quadrants. Dans le triangle sphérique *trirectangle*, tous les côtés sont des quadrants; le triangle trirectangle est le *huitième* de la sphère sur laquelle il est tracé : on le voit immédiatement en prolongeant les arcs de grand cercle qui forment les côtés du triangle.

580. *Deux triangles sphériques tracés sur la même sphère ou sur des sphères égales sont égaux dans toutes leurs parties lorsqu'ils ont : 1° un côté égal adjacent à deux angles égaux; 2° un angle égal compris entre deux côtés égaux; 3° les trois côtés égaux chacun à chacun; 4° les trois angles égaux chacun à chacun. Il y a égalité ou symétrie suivant que les éléments donnés sont semblablement ou inversement disposés* (542, 543).

Toutes ces propriétés résultent immédiatement (574) des propriétés correspondantes des angles trièdres et polyèdres démontrées aux numéros cités.

THÉORÈME.

581. *L'angle* APB *de deux arcs de grand cercle* PAP', PBP', *a pour mesure, soit l'arc de grand cercle* AB *décrit de son sommet* P *comme pôle et compris entre ses côtés, soit le plus petit arc de grand cercle* pp_1 *qui unit les pôles de ses côtés* (*fig.* 336).

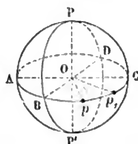
En effet :

1° Les arcs PA, PB, étant des quadrants, les angles POA, POB, sont droits, et l'angle AOB est l'angle plan qui mesure l'angle dièdre formé par les plans des deux grands cercles. Mais (571) cet angle dièdre est égal à l'angle APB des deux arcs de grands cercles, et l'angle au centre AOB a pour mesure l'arc AB; donc l'arc AB est aussi la mesure de l'angle APB.

2° Prenons sur la circonférence ABC, à partir des points A et B, *dans le même sens,* deux arcs Ap et Bp_1, égaux à un quadrant; l'arc pp_1 est

évidemment égal à l'arc AB, et pour justifier le second énoncé du théorème, il suffit de prouver que p et p_1 sont les pôles des cercles PAP′, PBP′. Or, la droite Op, perpendiculaire à OA, puisque Ap est un quadrant,

Fig. 336.



et perpendiculaire à OP, puisqu'elle est dans le plan ABC, est perpendiculaire au plan du grand cercle PAP′; p est donc le pôle de ce grand cercle. De même, p_1 est le pôle du grand cercle PBP′.

Nous avons dit que nous portions les arcs Ap et Bp_1 dans le même sens, à partir de leurs origines respectives A et B; si on les portait l'un dans un sens et l'autre en sens contraire, l'arc pp_1 serait le supplément de l'angle des deux grands cercles. Il y a donc une précaution à prendre dans l'application du second énoncé. Il faut considérer, pour l'un des grands cercles PAP′, le pôle p qui est du même côté que le demi-cercle PBP′, et, pour l'autre grand cercle PBP′, le pôle p_1 qui n'est pas du même côté que le demi-cercle PAP′.

Corollaires.

582. Pour que deux grands cercles se coupent à angle droit, il faut et il suffit que chacun d'eux renferme le pôle de l'autre.

583. Deux grands cercles APC, BPD, forment en se coupant au point P quatre angles APB, BPC, CPD, DPA; les angles adjacents APB, BPC, sont supplémentaires; les angles opposés par le sommet APB, CPD, sont égaux.

THÉORÈME.

584. *Si un triangle sphérique* A′B′C′ *est le triangle polaire d'un triangle sphérique donné* ABC, *réciproquement* ABC *est le triangle polaire de* A′B′C′.

Pour bien comprendre la définition du triangle polaire et l'objet du présent théorème, il convient de faire une remarque.

Soient EIF un grand cercle (*fig.* 337), P l'un de ses pôles, et M un point quelconque de la sphère. Si P et M sont d'un même côté du grand cercle EF, le plus petit arc de grand cercle qui va de P en M est moindre qu'un quadrant PI. Si P et M sont de part et d'autre du grand cercle EF, le plus petit arc de grand cercle allant de P en M est supérieur à un quadrant.

Cela posé, on nomme *triangle polaire d'un triangle sphérique* ABC un nouveau triangle A'B'C' (*fig.* 338) dont les sommets sont définis de la

Fig. 337.

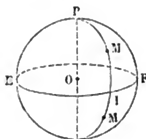
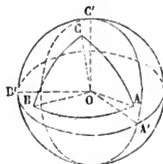


Fig. 338.



manière suivante : A' est celui des deux pôles du grand cercle BC qui est par rapport à ce grand cercle du même côté que le sommet opposé A; de même B' est le pôle de AC qui est situé par rapport à AC du même côté que B, et C' est le pôle de AB qui est placé par rapport à AB du même côté que C.

Il s'agit de démontrer que, réciproquement, le triangle ABC est le triangle polaire de A'B'C'. A cet effet, considérons l'un quelconque de ses sommets, C par exemple; A' étant le pôle de BC, l'arc de grand cercle qui joindrait C et A' est un quadrant; de même l'arc de grand cercle CB' est un quadrant, puisque B' est le pôle de AC. Donc le point C (474) est le pôle de A'B'. De plus, puisque C' est le pôle de AB, qui se trouve par rapport à AB du même côté que C, le plus petit arc de grand cercle allant de C en C' est moindre qu'un quadrant; par suite, C est le pôle de A'B', qui se trouve par rapport à A'B' du même côté que C'.

SCOLIE.

585. D'après cela, le triangle polaire A'B'C' d'un triangle donné ABC peut être considéré comme obtenu en décrivant des sommets A, B, C, pris successivement pour pôles, trois circonférences de grand cercle. Ces trois circonférences divisent la surface de la sphère (*fig.* 338) en huit triangles, dont l'un A'B'C' est le triangle polaire de ABC. C'est celui qui est tel, que les sommets A et A' soient d'un même côté par rapport à BC, les sommets B et B' d'un même côté par rapport à AC, et les sommets C et C' d'un même côté par rapport à AB.

Les deux trièdres OABC, OA'B'C', qui répondent aux triangles polaires ABC, A'B'C', sont supplémentaires (537). En effet, d'après la construction du point C', on voit que l'arête OC', par exemple, est perpendiculaire au plan AOB et située par rapport à ce plan du même côté que OC : on raisonnerait de même pour les autres arêtes OB' et OA'. Chaque angle de l'un des triangles ABC, A'B'C', doit donc (538) être le supplément du côté opposé dans l'autre triangle. Mais cette propriété, en

vertu de laquelle deux triangles polaires sont aussi appelés *triangles supplémentaires*, mérite d'être démontrée directement; c'est là l'objet du théorème qui suit.

THÉORÈME.

586. *Si* ABC, A'B'C', *sont deux triangles polaires, chaque angle de l'un de ces triangles a pour mesure une demi-circonférence de grand cercle, moins le côté opposé dans l'autre triangle* (*fig.* 339).

En effet, considérons, par exemple, l'angle A, et prolongeons, s'il le faut, les côtés AB et AC jusqu'à la rencontre de l'arc B'C'; puisque A est le pôle de B'C', l'angle A a pour mesure l'arc DE (581); mais on a évidemment

$$DE = B'E + DC' - B'C'.$$

D'ailleurs B'E et DC' sont des quadrants, puisque B' est le pôle de AC et C' le pôle de AB. On a donc

$$DE = \frac{1}{2} \text{ circ. de grand cercle } - B'C'.$$

On procéderait de la même manière pour les angles B et C.

Les triangles ABC et A'B'C' résultant l'un de l'autre par la même construction (585), la propriété que nous venons de démontrer pour les angles A, B, C, du premier triangle convient aux angles A', B', C', du second.

Fig. 339.

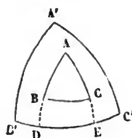
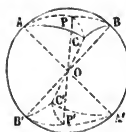


Fig. 340.



THÉORÈME.

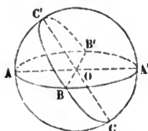
587. *Deux triangles sphériques symétriques* ABC, A'B'C', *sont équivalents* (*fig.* 340).

Prenons le pôle P du petit cercle qui passerait par les points A, B, C, et menons les arcs de grand cercle PA, PB, PC, qui sont égaux entre eux (473). Traçons le diamètre POP' et les arcs de grand cercle P'A', P'B', P'C'. L'égalité des angles POA, P'OA', entraîne celle des arcs PA et P'A'; on voit de même que PB = P'B', et PC = P'C'; par suite, comme PA = PB = PC, il faut qu'on ait P'A' = P'B' = P'C'. D'après cela, les triangles PAB, P'A'B', sont symétriques et isocèles; ils sont donc superposables. De même les triangles PAC, P'A'C', sont égaux entre eux, ainsi que les triangles PBC, P'B'C'. Donc enfin, le triangle ABC,

somme de PAB, PAC et PBC, est équivalent au triangle A'B'C', somme de P'A'B', P'A'C' et P'B'C'.

Si le pôle P tombait à l'extérieur du triangle ABC, ce triangle ne serait plus une somme, mais une différence.

Fig. 341.



COROLLAIRE.

588. *Si deux arcs de grand cercle* AC'A', BC'B', *se coupent dans un même hémisphère* C'ABA'B', *la somme des triangles opposés* AC'B, A'C'B', *est égale au fuseau dont l'angle est* AC'B (*fig.* 341).

On nomme *fuseau* la portion de surface sphérique comprise entre deux demi-grands cercles CAC', CBC', qui se terminent à un diamètre commun COC'; l'angle ACB ou AC'B de ces deux arcs est dit l'*angle du fuseau*.

Cela étant, le fuseau compris entre CAC' et CBC' se compose du triangle ABC' et du triangle ABC; et, comme le triangle A'B'C' est évidemment le symétrique de ABC et que deux triangles symétriques sont équivalents, on voit que le fuseau dont l'angle est C' est égal à la somme des triangles opposés AC'B, A'C'B'.

THÉORÈME.

589. *Si l'on prend pour unité d'angle l'angle droit et pour unité d'aire l'aire du triangle trirectangle, un fuseau a pour mesure le double du nombre qui mesure son angle.*

On voit immédiatement que, *sur la même sphère ou sur des sphères égales :* 1° *deux fuseaux de même angle sont superposables;* 2° *un fuseau est égal à la somme de deux autres, si son angle est égal à la somme des angles de ces deux autres.*

Il résulte de là (125) que *deux fuseaux quelconques d'une même sphère sont entre eux comme leurs angles.*

Cela étant, soient A et A' les nombres qui mesurent les angles de deux fuseaux d'une même sphère, l'angle droit étant pris pour unité; et soient F et F' les nombres qui mesurent ces fuseaux, le triangle trirectangle (579) étant pris pour unité d'aire; on aura

$$\frac{F}{F'} = \frac{A}{A'}.$$

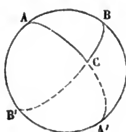
Prenons $A' = 1$; le fuseau correspondant, ayant son angle droit, sera égal au quart de la sphère, c'est-à-dire au double du triangle trirectangle : on aura donc $F' = 2$, et par suite

$$\frac{F}{2} = \frac{A}{1}, \quad \text{d'où} \quad F = 2A.$$

THÉORÈME.

590. *Si l'on prend l'angle droit pour unité d'angle et le triangle trirectangle pour unité d'aire, l'aire d'un triangle sphérique a pour mesure la somme des nombres qui mesurent ses angles diminuée de 2.*

Fig. 342.



Soit ABC le triangle proposé; achevons le grand cercle AB, et prolongeons les côtés AC, BC, jusqu'aux points A' et B' où ils rencontrent ce grand cercle. On aura évidemment

$$ABC + BCA' = \text{fus. } A,$$
$$ABC + ACB' = \text{fus. } B,$$

et (588)

$$ABC + B'CA' = \text{fus. } C.$$

La somme des premiers membres de ces trois égalités se compose de la demi-sphère et de deux fois l'aire du triangle ABC. Comme, dans le système d'unités adopté, la demi-sphère est mesurée par le nombre 4, si l'on désigne par S, A, B, C, les nombres qui mesurent l'aire et les angles du triangle, on aura (588)

$$4 + 2S = 2A + 2B + 2C,$$

d'où

(1) $$S = A + B + C - 2.$$

Scolies.

591. Soient R le rayon de la sphère évalué en mètres, σ l'aire du triangle en mètres carrés, et α, β, γ, les angles de ce triangle évalués en degrés ; on aura, en observant que le triangle trirectangle est égal au huitième $\frac{1}{2}\pi R^2$ de la sphère,

$$A = \frac{\alpha}{90}, \quad B = \frac{\beta}{90}, \quad C = \frac{\gamma}{90}, \quad S = \frac{\sigma}{\frac{1}{2}\pi R^2},$$

et par suite, en vertu de la relation (1),

$$\sigma = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180}{180}\pi R^2. \tag{2}$$

Par exemple, *quelle est, sur la sphère dont le rayon est* $2^m,4$, *l'aire du triangle sphérique dont les angles sont de* 51°37′, 73°11′, 87°43′?

La formule (2) donne, en réduisant en minutes,

$$\sigma = \frac{(51+73+87-180)60+37+11+43}{180.60}\cdot\pi(2,4)^2$$
$$= 1,040533\pi = 3^{mq},2689$$

à 1 centimètre carré près.

592. Les unités étant les mêmes qu'au n° 590, *l'aire d'un polygone sphérique de n côtés a pour mesure la somme des nombres qui mesurent ses angles, diminuée de* $2(n-2)$.

THÉORÈME (*).

593. *Le plus court chemin d'un point à un autre, sur la surface de la sphère, est l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, qui joint ces deux points.*

(*) Nous croyons, en vue des examens, devoir donner de ce théorème une seconde démonstration, que nous empruntons textuellement aux *Éléments de Géométrie* de M. Briot.

Sur l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, qui joint les deux points donnés A et B, prenons un point arbitraire C; je dis que le plus court chemin de A à B sur la surface de la sphère doit passer par le point C (*fig.* 343).

Du point A comme pôle, avec la corde qui sous-tend l'arc AC pour rayon, décrivons un petit cercle; du point B comme pôle, avec la corde qui sous-tend BC pour rayon, décrivons de même un petit cercle. Il est aisé de voir que les deux calottes sphériques qui ont pour pôles A et B et qui sont limitées par les deux petits cercles dont nous venons de parler sont extérieures l'une à l'autre. En effet, soit M un point quelconque du petit cercle dont B est le pôle, joignons ce point M aux deux points A et B par des arcs de grand cercle; dans le triangle sphérique ABM, le côté AB est plus petit que la somme des deux autres AM + BM; si l'on retranche de part et d'autre les arcs égaux BC et BM, on voit que l'arc AC est plus petit que AM; l'arc AM étant plus grand que AC, il est clair que le point M est situé en dehors de la calotte sphérique A; ainsi la calotte sphérique B est située tout entière en dehors de la calotte sphérique A.

Cela posé, considérons un chemin tel que ADEB tracé sur la surface de la sphère et allant du point A au point B sans passer par le point C; ce chemin coupera nécessairement les deux petits cercles, l'un en D, l'autre en E. Le chemin ADEB se compose de trois parties, le chemin de A à D, celui de D à E, et enfin celui de E à B; mais (en vertu de la symétrie de la sphère par rapport au diamètre passant par A), le plus court chemin de A à D est le même que celui

On appelle *ligne brisée sphérique* toute ligne tracée sur une sphère et formée par une série d'arcs de grand cercle. La longueur d'une telle ligne offre un sens précis, puisqu'on a défini (227) la longueur d'un arc de cercle.

On appelle *longueur d'un arc de courbe* AB *quelconque tracée sur la sphère* la limite vers laquelle tend le périmètre d'une ligne brisée sphérique AEFGIB inscrite dans cet arc, lorsque les côtés de cette ligne tendent vers zéro (*fig.* 344). On démontre (*voir* notre *Traité de Géométrie*) que cette limite existe et qu'elle est indépendante de la loi suivant laquelle les côtés tendent vers zéro.

Cela posé, il est facile de trouver le plus court chemin entre deux points A et B de la surface de la sphère.

Soient AMB l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, qui unit les points A et B, et AEFGIB une courbe sphérique quelconque

Fig. 343.

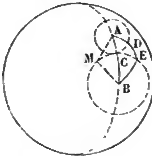
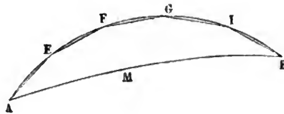


Fig. 344.



tracée entre ces deux points. AEFGIB étant une portion de polygone sphérique inscrite dans cette courbe, on aura (576)

$$AMB < AE + EF + FG + GI + IB.$$

Or, si l'on fait tendre vers zéro les côtés du polygone inscrit, le second membre a pour limite la longueur de l'arc de courbe AEFGIB. Donc, l'arc de grand cercle AMB est moindre que toute autre courbe sphérique allant de A en B; c'est le plus court chemin du point A au point B sur la sphère.

THÉORÈME.

594. *Si, d'un point* O *de la sphère, on mène sur un grand cercle* AB *l'arc de grand cercle* OI *perpendiculaire et moindre qu'un quadrant, et plusieurs arcs de grand cercle obliques* OC, OD, OE (*fig.* 345) :

---

de A à C; pareillement, le plus court chemin de B à E est le même que celui de B à C; il en résulte que le chemin ADEB est plus long que le plus court chemin de A à B passant par le point C. On conclut de là que le plus court chemin de A à B doit passer par un point quelconque C de l'arc de grand cercle AB; il coïncide donc avec cet arc de grand cercle.

1° *L'arc perpendiculaire* OI *est moindre que tout arc oblique* OC;

2° *Deux arcs obliques* OC *et* OE, *dont les pieds* C *et* E *sont équidistants du pied* I *de l'arc perpendiculaire, sont égaux;*

3° *De deux arcs obliques* OC *et* OD, *ou* OC *et* OE, *celui dont le pied s'écarte le plus du pied* I *de l'arc perpendiculaire est le plus long.*

Observons d'abord que du point O on peut mener un grand cercle, et un seul, qui soit perpendiculaire à AB; c'est celui qui passe par le point O et par le pôle P du grand cercle AB (582). Par suite, du point O on peut mener dans l'hémisphère OAB deux arcs de grand cercle perpendiculaires à AB : l'un OI moindre qu'un quadrant, l'autre OPI' plus grand qu'un quadrant. C'est de l'arc OI qu'il est question dans le théorème énoncé. La démonstration de ce théorème est d'ailleurs identique à celle du n° 40 de la *Géométrie plane;* nous avons même employé les mêmes lettres, afin que le texte de ce numéro pût servir; seulement, les triangles qui interviennent dans la démonstration sont ici symétriques au lieu d'être égaux.

Fig. 345.

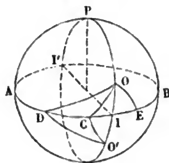
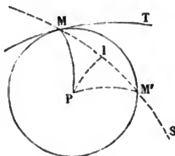


Fig. 346.



COROLLAIRES.

595. *L'arc de grand cercle* OI, *moindre qu'un quadrant, mené du point* O *à angle droit sur un grand cercle* AB, *est la ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur la sphère du point* O *au grand cercle* AB; nous donnerons, d'après cela, à cet arc OI le nom de *distance sphérique* du point O au grand cercle AB.

L'arc OPI' est le plus long de tous les arcs de grand cercle qui vont du point O au grand cercle AB, dans l'hémisphère OAB.

Les réciproques des propositions précédentes sont vraies (43).

Le lieu géométrique des points de la sphère équidistants de deux points de cette surface, est le grand cercle perpendiculaire sur le milieu de l'arc de grand cercle qui unit les deux points (47).

Deux triangles sphériques rectangles sont égaux ou symetriques : 1° *lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle oblique égal;* 2° *lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté égal* (49).

L'arc de grand cercle bissecteur de l'angle de deux grands cercles est le lieu des points de la sphère équidistants des deux côtés de cet angle (52).

THÉORÈME.

596. *L'arc de grand cercle* MT, *tangent à un petit cercle, est perpendiculaire à l'extrémité du rayon sphérique* PM *qui aboutit au point de contact* (*fig.* 346).

On appelle *arc de grand cercle tangent en un point* M *d'une courbe sphérique* la limite des positions que prend le grand cercle mené par M et un point voisin M′, lorsque ce second point M′ de la courbe tend vers M.

Cela posé, par le point M et un point voisin M′ menons l'arc de grand cercle MM′S, et joignons par un arc de grand cercle le mileu I de MM′ au pôle P du petit cercle. Le point I venant en M en même temps que M′, l'angle TMP est la limite de l'angle SIP ; mais ce dernier angle est toujours droit, puisque P et I sont l'un et l'autre équidistants de M et de M′ ; donc l'angle TMP est droit.

Scolie.

597. *Lorsque deux petits cercles d'une sphère se coupent, l'arc de grand cercle qui passe par leurs pôles est perpendiculaire sur le milieu de l'arc de grand cercle qui passe par leurs deux points d'intersection.*

Lorsque deux petits cercles d'une sphère sont tangents, leur point de contact est situé sur le grand cercle qui passe par leurs pôles, et l'arc de grand cercle mené par le point de contact à angle droit sur celui qui unit les pôles est tangent à chacun des deux petits cercles.

Les rayons sphériques R et r des deux petits cercles, et l'arc de grand cercle D, moindre qu'une demi-circonférence, qui passe par leurs pôles, satisfont aux mêmes relations que les rayons et la distance des centres de deux cercles situés dans un même plan. Les raisonnements sont d'ailleurs les mêmes qu'aux nos 114 et 115.

Il y a cependant une condition de plus à laquelle les quantités D, R et r, doivent satisfaire dans tous les cas. Quelle que soit la position relative des deux cercles, on a toujours

$$D + R + r < 4,$$

en prenant le quart d'un grand cercle pour unité de longueur; en effet, D est toujours moindre que 2, et R et r sont l'un et l'autre inférieurs à 1. Ainsi *la distance sphérique des deux pôles et les rayons sphériques des deux cercles ont une somme moindre qu'une circonférence de grand cercle.*

PROBLÈME.

598. *Tracer sur la sphère un grand cercle passant par deux points donnés* A *et* B (*fig.* 347).

L'inconnue de la question est le pôle du cercle demandé. Or, la distance de ce pôle P à chacun des points A et B est égale à la corde du quadrant (474); on l'obtiendra donc en décrivant successivement deux arcs de cercle, des points A et B comme pôles, avec une distance polaire égale à la corde du quadrant.

Fig. 347.

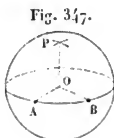
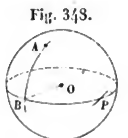


Fig. 348.



PROBLÈME.

599. *Mener par un point donné* A *sur la sphère un arc de grand cercle perpendiculaire à un grand cercle donné* BP (*fig.* 348).

L'inconnue de la question est le pôle du cercle demandé. Or, ce pôle P doit se trouver sur le cercle BP (582), et être à une distance du point A égale à la corde du quadrant. On l'obtiendra donc en décrivant, du point A comme pôle, avec une distance polaire égale à la corde du quadrant, un arc de cercle qui rencontre en P le cercle donné BP.

PROBLÈME.

600. *Mener un arc de grand cercle perpendiculaire sur un arc de grand cercle donné* AB, *en son milieu;* ou, *diviser un arc de grand cercle* AB *en deux parties égales* (*fig.* 349).

Il suffit de décrire des points A et B comme pôles, avec la même ouverture de compas, deux arcs qui se coupent en C et D; puis de faire passer un grand cercle par C et D.

Remarquons que ce grand cercle CD divise aussi en deux parties égales tous les arcs de petit cercle dont les extrémités sont A et B.

Fig. 349.

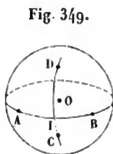
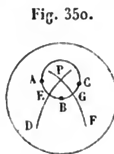


Fig. 350.



PROBLÈME.

601. *Trouver le pôle d'un petit cercle passant par trois points donnés* A, B, C, *sur la sphère* (*fig.* 350).

Ce pôle P, étant équidistant de A, B, C, est à l'intersection des arcs de grand cercle (600) élevés perpendiculairement sur les milieux des arcs de grand cercle AB et BC.

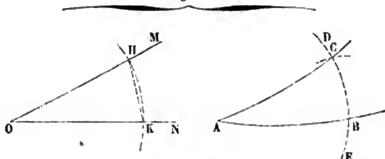
Le pôle P une fois connu, on tracera le petit cercle avec une ouverture de compas égale à PA.

PROBLÈME.

602. *Par un point* A *pris sur un arc de grand cercle* AB, *mener un arc de grand cercle incliné d'un angle donné sur le premier* (*fig.* 351).

Sur une feuille de papier, on trace un angle rectiligne MON égal à l'angle donné, et de son sommet comme centre, avec un rayon égal à celui de la sphère, on décrit un arc de cercle HK; cet arc HK sera la longueur de l'arc de grand cercle qui mesure l'angle du grand cercle donné et du grand cercle inconnu.

Fig. 351.



Cela fait, du point A comme pôle, on décrira sur la sphère un grand cercle DE; puis, en prenant pour pôle le point B où ce cercle coupe le grand cercle donné AB et en donnant au compas une ouverture égale à la corde HK, on décrira un petit arc de cercle coupant DE en C; il ne restera plus alors qu'à mener un grand cercle par les points C et A.

PROBLÈME.

603. *Construire un triangle sphérique, connaissant trois quelconques de ses six éléments* (angles ou côtés).

Ce problème offre six cas distincts; on peut donner : 1° les trois côtés ou les trois angles; 2° deux côtés et l'angle compris, ou un côté et les deux angles adjacents; 3° deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, ou deux angles et le côté opposé à l'un d'eux.

Dans cette énumération, nous avons réuni chaque fois les deux cas corrélatifs, c'est-à-dire qui se ramènent l'un à l'autre par la considération du triangle polaire. Il n'y a donc que trois cas à traiter directement.

1° *On donne les trois côtés* a, b, c.

Supposons, pour fixer les idées, $a > b > c$. Traçons un grand cercle sur la sphère, et prenons sur ce grand cercle un arc BC égal à a; du point B comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde de b, traçons

un arc de cercle, et du point C comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde de c, décrivons un second arc de cercle; A étant un point commun à ces deux arcs, le triangle sphérique ABC sera le triangle demandé.

Les deux arcs se coupent généralement en deux points A et A′, situés de part et d'autre du grand cercle BC; de là deux solutions, le triangle ABC et le triangle A′BC, symétrique du premier.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les deux cercles se coupent, c'est-à-dire qu'on ait (597), en supposant a, b, c, exprimés en degrés,

$$a < b + c, \quad a > b - c, \quad a + b + c < 360°.$$

La seconde condition est toujours remplie, puisque nous supposons $a > b > c$; les conditions de possibilité se réduisent donc à

$$a < b + c \quad \text{et} \quad a + b + c < 360°.$$

Donc, *pour qu'on puisse construire un triangle sphérique avec trois côtés donnés, il faut et il suffit que le plus grand côté soit moindre que la somme des deux autres, et que la somme des trois côtés soit moindre qu'une circonférence de grand cercle*. Nous savions déjà que ces conditions étaient nécessaires (576, 578).

Pour qu'on puisse construire un triangle sphérique avec trois angles donnés A, B, C, il faut et il suffit que son triangle polaire, dont les côtés sont $180° - A$, $180° - B$, $180° - C$, soit possible. D'après l'alinéa précédent, en supposant, pour fixer les idées,

$$A < B < C, \quad \text{d'où} \quad 180° - A > 180° - B > 180° - C,$$

on doit donc avoir

$$180° - A < 180° - B + 180° - C$$

et

$$180° - A + 180° - B + 180° - C < 360°,$$

ou

$$A + 180° > B + C \quad \text{et} \quad A + B + C > 180°.$$

Nous savions déjà (579) que ces conditions étaient nécessaires.

2° *On donne deux côtés a et b et l'angle compris* C.

Même solution qu'en *Géométrie plane* (145).

3° *On donne deux côtés a et b et l'angle* A *opposé au côté a* (*fig.* 352).

Construisons sur la sphère deux grands cercles formant un angle égal à A (602). Prenons, à partir du sommet, sur l'un des côtés de cet angle, un arc AC égal à b, et du point C comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde de a, décrivons un arc de cercle; B étant l'inter-

section de ce cercle avec le second côté de l'angle, le triangle ABC sera le triangle demandé.

En discutant ce problème, on voit aisément que si A et a sont de nature différente, le problème, s'il est possible, n'a qu'une solution; si A et a sont de même nature, le problème, s'il est possible, a une ou deux solutions (*voir* notre *Traité de Géométrie*).

Fig. 352.

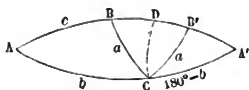
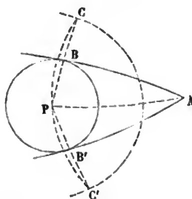


Fig. 353.



PROBLÈME.

604. *Par un point donné, mener un arc de grand cercle tangent à un petit cercle donné* (*fig.* 353).

Si le point donné est sur le cercle, il suffit d'élever par ce point un arc de grand cercle perpendiculaire au rayon sphérique correspondant (596).

Supposons, en second lieu, que le point donné A soit extérieur au petit cercle donné, c'est-à-dire soit situé dans la plus grande des deux calottes sphériques séparées par le petit cercle. Considérons le problème comme résolu; nommons P le pôle du petit cercle donné, B le point de contact de l'arc BA, et prolongeons le rayon sphérique PB d'une quantité BC = PB. Le point C se trouve d'abord sur un cercle décrit du point P comme pôle avec une ouverture de compas égale à la corde d'un arc de grand cercle double du rayon sphérique r du petit cercle. Il se trouve en outre sur un second cercle décrit du point A pour pôle avec une ouverture de compas égale à la corde de l'arc PA = D; car BA étant perpendiculaire sur le milieu de PBC, le point A est équidistant de P et de C (595).

Le point C une fois obtenu à l'aide de ces deux cercles auxiliaires, on mènera l'arc de grand cercle PC qui coupera le petit cercle en B, et, en joignant B et A par un arc de grand cercle, on aura l'arc tangent demandé.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les deux cercles auxiliaires se coupent, c'est-à-dire qu'on ait (597)

$$D < D + 2r, \quad D > 2r - D, \quad D + D + 2r < 4.$$

La première condition est toujours remplie, et les deux autres équivalent à

$$r < D < 2 - r;$$

elles expriment précisément que le point A doit être situé hors de la calotte sphérique PB.

Les cercles auxiliaires se coupent en deux points C et C'; de là deux solutions, AB et AB'.

La construction que nous venons d'indiquer s'applique au problème analogue de Géométrie plane; mais elle exige plus de place que celle du n° 156.

---

§ XI.

Programme officiel : *Définition de l'ellipse par la propriété des foyers. — Tracé de la courbe par points et d'un mouvement continu. — Axes. — Sommets. — Rayons vecteurs. — Les rayons vecteurs menés des foyers à un point de l'ellipse font avec la tangente en ce point, et d'un même côté de cette ligne, des angles égaux. — Mener la tangente à l'ellipse par un point pris sur la courbe, par un point extérieur. — Normale à l'ellipse.*

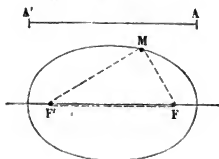
DÉFINITION ET TRACÉ DE LA COURBE.

605. L'*ellipse* est une courbe plane telle, que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes de son plan est égale à une longueur constante. Ainsi (*fig.* 354), les deux points fixes étant F et F' et la longueur donnée étant représentée par la droite AA', on a pour tout point M de l'ellipse

$$MF + MF' = AA'.$$

D'après cela, pour décrire une ellipse d'*un mouvement continu,* on plante sur la feuille de dessin, en F et en F', deux

Fig. 354.



épingles qu'on entoure d'un fil sans fin (c'est-à-dire dont les deux bouts sont réunis) auquel on donne la longueur totale

FF′ + AA′. On tend constamment ce fil à l'aide d'un crayon que l'on fait mouvoir sur le papier jusqu'à ce qu'on soit ramené au point de départ. La pointe du crayon trace évidemment l'ellipse demandée; car, pour une position quelconque M de cette pointe, on a

$$FF' + MF + MF' = FF' + AA' \quad \text{ou} \quad MF + MF' = AA'.$$

Le procédé qu'on vient d'indiquer est surtout applicable sur le terrain : on remplace alors les épingles par des piquets, le fil par une corde et le crayon par un jalon.

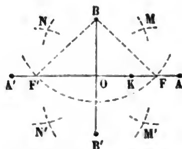
Les points F et F′ sont les *foyers* de l'ellipse, les droites MF et MF′ sont les *rayons vecteurs* du point M. La longueur constante AA′ est ordinairement représentée par $2a$, la distance FF′ ou *distance focale* est représentée par $2c$. L'existence du triangle MFF′ entraîne alors la condition $2c < 2a$ ou $c < a$.

Le rapport $\frac{c}{a}$ est l'*excentricité* de l'ellipse. Cette excentricité peut varier de 0 à 1. Pour $c = 0$, elle est nulle, les foyers se confondent et l'ellipse devient un cercle de rayon a. Pour $c = a$, l'excentricité est égale à 1, et l'ellipse se réduit à la portion de droite $FF' = 2a$. Entre ces deux limites, l'ellipse se rapproche d'autant plus de la droite FF′ que son excentricité est plus grande.

606. On peut aussi tracer l'ellipse par points.

En effet, marquons (*fig.* 355) le milieu O de la distance focale FF′ et, de part et d'autre du point O, prenons

Fig. 355.



$OA = OA' = a$; puis, un point quelconque K sur AA′. Si des points F et F′ comme centres, avec des rayons respectivement égaux à AK et A′K, nous décrivons des arcs de cercle, leurs

points d'intersection M et M' appartiendront à l'ellipse, puisqu'on aura

$$MF + MF' = M'F + M'F' = AK + A'K = 2a.$$

La distance des centres FF' étant toujours moindre que la somme $2a$ des rayons, il suffit, pour l'intersection des deux circonférences, que cette distance soit plus grande que la différence des rayons, c'est-à-dire qu'on ait

$$FF' > A'K - AK \quad \text{ou} \quad 2c > 2a - 2AK.$$

La condition cherchée est donc $AK > a - c$ ou $AK > AF$.

D'ailleurs on peut échanger les centres F et F' sans modifier les rayons employés, de manière à obtenir pour chaque point K quatre points M et M', N et N', de l'ellipse. Les limites des positions du point K sont alors l'un des foyers F et le point O.

Si le point K est en O, les points correspondants de l'ellipse sont en B et en B' sur la perpendiculaire élevée à la droite FF' par son milieu. Si le point K est en F, les deux points correspondants de l'ellipse sont en A et en A'. Le rayon vecteur minimum est AF ou $a - c$, le rayon vecteur maximum est A'F ou $a + c$.

THÉORÈME.

607. *L'ellipse a : 1° pour axes, la droite* AA' *qui passe par ses deux foyers, et la droite* BB' *perpendiculaire au milieu de la première; 2° pour centre, l'intersection de ces deux droites.*

On appelle *axe* d'une courbe toute droite par rapport à laquelle les divers points de cette courbe sont symétriques deux à deux; on appelle *centre* d'une courbe tout point par rapport auquel les divers points de cette courbe sont symétriques deux à deux (545).

1° Soit M un point de l'ellipse (*fig.* 356); on aura

$$MF + MF' = 2a.$$

Supposons alors que le plan de la figure fasse une demi-révolution autour de AA'. Dans ce mouvement, les foyers restent fixes, le point M vient dans la position symétrique M_1 et, comme le triangle MFF' ne se déforme pas, on a

$$M_1F + M_1F' = 2a,$$

c'est-à-dire que le point M_1 appartient à l'ellipse. Donc, à tout point M de l'ellipse correspond un point M_1, symétrique de M par rapport à AA'.

Si le plan de la figure fait de même une demi-révolution autour de BB', les foyers ne font que s'échanger, le point M vient dans la position symétrique M_2 et, comme le triangle MFF' ne se déforme pas, on a encore

$$M_2F + M_2F' = 2a;$$

ce qui montre qu'à tout point M de l'ellipse correspond un autre point M_2 de la courbe, symétrique de M par rapport à BB'.

Fig. 356.

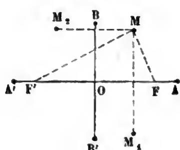
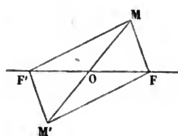


Fig. 357.



2° Soient (*fig.* 357) M un point de l'ellipse et M' son symétrique par rapport à O; menons les rayons vecteurs de ces points. Les diagonales MM' et FF' se coupant mutuellement en parties égales, le quadrilatère MFM'F' est un parallélogramme (84, 4°), et le point M' appartient à l'ellipse en vertu de l'égalité des deux contours FMF' et FM'F'.

Corollaires.

608. On appelle *longueurs* des axes de l'ellipse les longueurs AA' et BB' interceptées sur ces axes par la courbe (*fig.* 355). La longueur du premier axe AA' est donc (606) égale à $2a$, la longueur du second BB' est représentée par $2b$.

La perpendiculaire BO (*fig.* 355) étant moindre que l'oblique $BF = a$, on a

$$b < a.$$

AA' est dit alors le *grand axe* et BB' le *petit axe* de l'ellipse.

Les extrémités A et A', B et B', des deux axes sont appelées les *sommets* de la courbe.

Le triangle rectangle BOF (*fig.* 355) donne $a^2 = b^2 + c^2$, re-

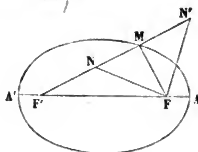
lation qui permet de déterminer l'une des trois quantités a, b, c, lorsqu'on connaît les deux autres.

Quand on donne les longueurs a et b, il est facile de déterminer graphiquement les foyers. On n'a qu'à décrire de l'extrémité B du petit axe comme centre (*fig.* 355), avec un rayon égal à a, un arc de cercle qui coupe le grand axe aux deux foyers F et F'.

THÉORÈME.

609. *Suivant qu'un point est intérieur ou extérieur à l'ellipse, la somme de ses distances aux deux foyers est plus petite ou plus grande que* $2a$.

Fig. 358.



Soit d'abord (*fig.* 358) un point N intérieur à l'ellipse. Joignons ce point aux deux foyers, prolongeons F'N jusqu'à la rencontre de la courbe en M, et menons MF. Un théorème connu (30) donne immédiatement

$$NF + NF' < MF + MF' \quad \text{ou} \quad NF + NF' < 2a.$$

Soit de même un point N' extérieur à l'ellipse. Joignons ce point aux deux foyers; N'F' coupant la courbe au point M, menons MF. En s'appuyant sur le même théorème, on aura ici

$$N'F + N'F' > MF + MF' \quad \text{ou} \quad N'F + N'F' > 2a.$$

COROLLAIRE.

610. *Suivant que la somme des distances d'un point aux deux foyers est supérieure, égale ou inférieure à* $2a$, *ce point est hors de la courbe, sur la courbe ou dans son intérieur.*

THÉORÈME.

611. *La tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs du point de contact, extérieurement à leur angle.*

Prenons sur l'ellipse (*fig.* 359) deux points voisins M et M'; menons la sécante MM'S et les rayons vecteurs des deux points M et M'. Portons sur F'M une longueur F'D = F'M' et sur FM une longueur FC = FM'. MD représente alors l'augmentation que subit le rayon vecteur mené du foyer F' quand on passe du point M au point M', MC la diminution que subit le rayon vecteur mené du foyer F quand on passe du même point M au même point M'; comme la somme des rayons vecteurs d'un point de l'ellipse reste constante, MD est égal à MC.

Cela posé, d'un point quelconque G de la sécante MM'S, menons aux droites M'D et M'C des parallèles GI et GH jusqu'à la rencontre des rayons vecteurs du point M. Le quadrilatère GHMI étant semblable au quadrilatère M'CMD (185), l'égalité de MD et de MC entraîne celle de MI et de MH.

Les droites GH et GI, étant parallèles aux bases M'C et M'D des triangles isocèles CFM', DF'M', sont perpendiculaires aux bissectrices de leurs angles au sommet. Mais à mesure que le point mobile M' se rapproche du point fixe M, la sécante MM'S se rapproche de la tangente au point M. Les bissectrices des angles CFM', DF'M', ayant alors pour limites les rayons vecteurs FM, F'M, du point M, les droites GH et GI ont elles-mêmes pour limites les perpendiculaires abaissées du point G sur ces rayons vecteurs. D'ailleurs, pendant ce mouvement, MH varie en restant toujours égal à MI.

Fg. 359.

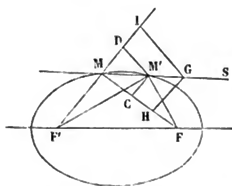
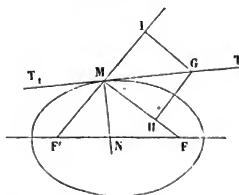


Fig. 360.



La tangente MT au point M (*fig.* 360) doit donc être telle, que si, d'un point quelconque G de cette droite, on abaisse des perpendiculaires GH et GI sur les rayons vecteurs MF et MF' du point M, on ait MH = MI. Les triangles rectangles MGH, MGI, sont alors égaux (49), et il en est de même des

angles GMH, GMI. *La tangente à l'ellipse est donc bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs du point de contact et le prolongement de l'autre rayon.*

L'angle $F'MT_1$ étant l'opposé par le sommet de l'angle GMI, les deux angles GMH ou FMT et $F'MT_1$ sont égaux, ce qui vérifie le premier énoncé du théorème.

Corollaires.

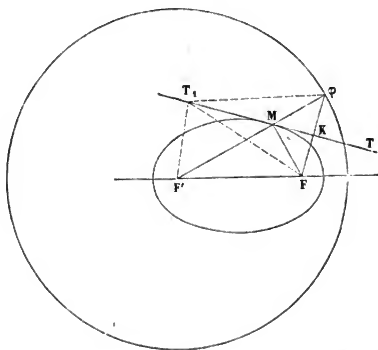
612. *Tous les points de la tangente* MT, *sauf le point* M, *sont extérieurs à l'ellipse, qui est par suite une courbe convexe.*

Abaissons du foyer F (*fig.* 361), sur la tangente MT au point M, une perpendiculaire FK qui vient rencontrer en φ le prolongement de F'M. La tangente étant bissectrice de l'angle $FM\varphi$, l'égalité des triangles rectangles FMK, φMK (33, 1°), donne $FK = \varphi K$, c'est-à-dire que le point φ est le symétrique du foyer F par rapport à la tangente MT. L'égalité des mêmes triangles donne $MF = M\varphi$ et, par suite,

$$F'\varphi = MF + MF' = 2a.$$

Cela posé, la tangente étant perpendiculaire sur le milieu

Fig. 361.



de $F\varphi$, un point quelconque T_1 de cette droite est équidistant de F et de φ. On a donc, d'après le triangle $F'T_1\varphi$,

$$T_1F + T_1F' = T_1\varphi + T_1F' \quad \text{ou} \quad T_1F + T_1F' > F'\varphi = 2a.$$

Tous les points de la tangente MT, sauf le point M, sont donc extérieurs à l'ellipse (610).

La tangente a nécessairement (107) avec la courbe au moins un point commun de moins que les droites qui en ont le plus. Il résulte de là qu'une droite ne peut rencontrer l'ellipse en plus de deux points.

613. Si l'on mène au point M (*fig.* 360) une perpendiculaire MN à la tangente MT, les deux angles FMN, F'MN, sont égaux comme compléments d'angles égaux. Donc, *la normale à l'ellipse est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs du point de contact.*

La normale en un sommet de l'ellipse se confond avec l'axe correspondant et la tangente est perpendiculaire à cet axe, de sorte que la courbe est *inscrite* dans le rectangle construit sur ses axes.

Les propriétés précédentes justifient la dénomination de *foyer*. L'angle d'incidence et l'angle de réflexion étant égaux d'après une loi physique, les rayons lumineux, sonores ou calorifiques, qui partent de l'un des foyers F d'une ellipse, viennent, après leur réflexion sur la courbe, converger à l'autre foyer F'.

THÉORÈME.

614. *Le lieu des points symétriques* φ *de l'un des foyers* F *de l'ellipse, par rapport aux tangentes, est un cercle décrit de l'autre foyer* F' *comme centre, avec la longueur* $2a$ *du grand axe pour rayon* (*fig.* 361).

Le premier alinéa du n° 612 renferme la démonstration de ce théorème.

On donne au cercle F'φ le nom de *cercle directeur relatif au foyer* F'. L'ellipse a deux cercles directeurs correspondant à ses deux foyers.

Scolie.

615. *Le lieu des points équidistants d'un cercle de centre* F' *et d'un point intérieur* F *est une ellipse dont les points* F *et* F' *sont les foyers et qui a pour cercle directeur relatif au foyer* F' *le cercle donné* (*fig.* 361).

En effet, soit M un point du lieu. En le joignant aux deux

points F et F′ et en prolongeant F′M jusqu'à sa rencontre φ avec la circonférence donnée, on a par hypothèse

$$M\varphi = MF, \quad \text{d'où} \quad MF + MF' = F'\varphi.$$

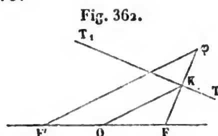
Pour construire le lieu, il suffit évidemment de joindre le point F à un point quelconque φ de la circonférence donnée, et d'élever une perpendiculaire TT_1 sur le milieu K de la droite $F\varphi$; cette perpendiculaire coupe le rayon $F'\varphi$ en un point M du lieu, et elle est la tangente en ce point (611).

Il résulte de là que : *Si d'un point* F *pris à l'intérieur d'un cercle* $F'\varphi$, *on mène des droites aux divers points de sa circonférence, les perpendiculaires élevées à ces droites par leurs milieux touchent ou enveloppent une ellipse, qui a pour foyers les points* F *et* F′ *et pour grand axe le rayon* $F'\varphi$.

THÉORÈME.

616. *Le lieu des projections des foyers d'une ellipse sur ses tangentes est la circonférence de cercle décrite sur le grand axe comme diamètre.*

Fig. 362.



Soient (*fig.* 362) F et F′ les deux foyers, K la projection du foyer F sur une tangente quelconque TT_1, et φ le symétrique de F par rapport à cette tangente. Le côté $F'\varphi$ du triangle $FF'\varphi$ étant égal à $2a$ (612), la droite OK qui joint les milieux des deux autres côtés est égale à a. Le point K appartient donc à la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre.

Réciproquement, tout point K de cette circonférence est la projection de l'un des foyers F sur une tangente. Car si l'on prolonge FK d'une quantité $K\varphi = FK$, on aura évidemment

$$F'\varphi = 2OK = 2a.$$

Par suite, le point φ appartient au cercle directeur relatif au foyer F′, et la perpendiculaire élevée sur $F\varphi$ par son milieu K est (615) une tangente à l'ellipse.

Le cercle OK est dit le *cercle principal* de l'ellipse.

Il résulte de là que : *Si le sommet d'une équerre décrit le cercle principal d'une ellipse, pendant que l'un de ses côtés passe constamment par un foyer de la courbe, l'autre côté de l'équerre lui reste toujours tangent.*

PROBLÈME.

617. *Mener une tangente à l'ellipse par un point donné.*

1° *Si le point donné* M *est sur la courbe*, on le joint aux deux foyers (*fig.* 360), et l'on mène la bissectrice de l'angle FMI formé par l'un des rayons vecteurs MF et le prolongement MI de l'autre rayon MF' (611).

2° *Si le point donné* P *est extérieur à l'ellipse* (*fig.* 363), on remarque que la question serait résolue, si l'on connaissait le symétrique φ de l'un des foyers F par rapport à la tangente cherchée; car on aurait dès lors cette tangente en abaissant de P une perpendiculaire TT_1 sur $F\varphi$: la droite TT_1 couperait d'ailleurs $F'\varphi$ au point de contact M (615). Or, le point φ se

Fig. 363.

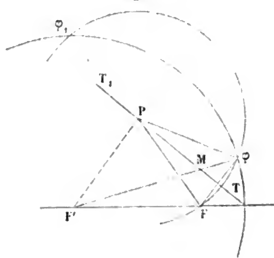
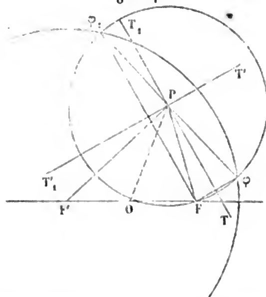


Fig. 364.



trouve à la fois sur le cercle directeur relatif au foyer F' et sur le cercle de centre P et de rayon PF.

Ces deux cercles se coupent toujours quand le point P est extérieur à l'ellipse. En effet, PF' étant la distance des centres, PF et $2a$ les deux rayons, le triangle PFF' donne

$$PF' < PF + FF' \quad \text{et, à fortiori,} \quad PF' < PF + 2a.$$

Le point P étant extérieur à la courbe, on peut avoir

PF $>$ ou $<$ $2a$. Si PF est moindre que $2a$, on a

$$PF + PF' > 2a, \quad \text{d'où} \quad PF' > 2a - PF.$$

Si PF est plus grand que $2a$, le triangle PFF' permet de poser

$$PF' > PF - FF' \quad \text{et, à fortiori,} \quad PF' > PF - 2a.$$

Ainsi, la construction précédente réussit toujours quand le point P est extérieur à la courbe; et comme les circonférences tracées se coupent en deux points φ et φ_1, il y a deux solutions.

Corollaires.

618. Cherchons la condition pour que les deux tangentes menées du point P à l'ellipse soient à angle droit.

Si les deux tangentes TT_1, $T'T'_1$, menées du point P, sont à angle droit (*fig.* 364), comme elles sont respectivement perpendiculaires sur le milieu des droites $F\varphi$, $F\varphi_1$, l'angle $\varphi F \varphi_1$ de ces deux droites doit être lui-même un angle droit. Cet angle étant inscrit dans la circonférence PF dont le centre est P, la droite $\varphi\varphi_1$ est un diamètre de cette circonférence, et P est le milieu de ce diamètre.

Le lieu des points P est donc le lieu décrit par le milieu de la corde interceptée dans le cercle directeur relatif au foyer F', par un angle droit tournant autour de son sommet fixe F. Or, si l'on joint le point P aux foyers F et F', on a $P\varphi = PF$, et le triangle rectangle $F'P\varphi$ donne alors

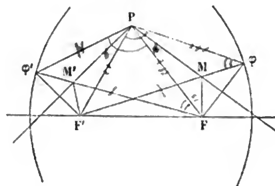
$$\overline{PF'}^2 + \overline{P\varphi}^2 = \overline{PF'}^2 + \overline{PF}^2 = \overline{F'\varphi}^2 = 4a^2.$$

La somme des carrés des distances du point P aux points F et F' étant constante, le lieu cherché est une circonférence de cercle concentrique à l'ellipse et qui a pour rayon la médiane OP du triangle PFF' (206). Comme les sommets du rectangle construit sur les axes et circonscrit à l'ellipse (613) font nécessairement partie du lieu, le rayon OP est égal à la demi-diagonale de ce rectangle, c'est-à-dire à $\sqrt{a^2 + b^2}$.

619. *Les tangentes* PM, PM', *menées à l'ellipse par un point extérieur* P, *font des angles égaux avec les droites qui vont du point* P *aux deux foyers; la droite qui va du point* P *à*

l'un des foyers est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs qui vont de ce foyer aux deux points de contact M *et* M' (*fig.* 365).

Fig. 365.



Menons les deux cercles directeurs de l'ellipse. φ étant le symétrique de F par rapport à la tangente PM et φ' le symétrique de F' par rapport à la tangente PM', les deux triangles PFφ' et PF'φ sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. Les angles FPφ' et F'Pφ sont donc égaux. Si l'on enlève la partie commune FPF', les restes FPφ, F'Pφ', sont égaux, ainsi que leurs moitiés MPF, M'PF'.

En second lieu, l'égalité des triangles PFφ', PF'φ, entraîne celle des angles PFφ', PφF'. Mais les deux triangles PMφ, PMF, étant égaux (33), l'angle PφF' est aussi égal à l'angle PFM, et la droite PF est la bissectrice de l'angle MFM'.

THÉORÈME.

620. *Mener à l'ellipse une tangente parallèle à une droite donnée.*

Tout revient encore à trouver le point symétrique φ de l'un des foyers F par rapport à la tangente cherchée. Or, ce point est à l'intersection du cercle directeur relatif au foyer F' (614) et de la perpendiculaire menée du foyer F sur la droite donnée DD' (*fig.* 366). Cette perpendiculaire coupe toujours le cercle F' en deux points φ et φ_1, puisque le point F est intérieur à ce cercle. Les perpendiculaires TT_1 et $T'T'_1$ élevées aux droites Fφ et $F\varphi_1$ par leurs milieux sont les tangentes demandées, et leurs points de contact sont à leurs rencontres respectives avec les rayons F'φ et $F'\varphi_1$ (615).

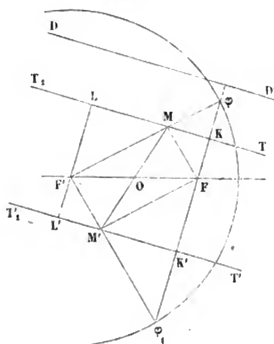
COROLLAIRES.

621. *Les deux points de contact* M *et* M' *des deux tangentes*

parallèles TT_1, $T'T'_1$, *sont symétriques par rapport au centre* O *de l'ellipse.*

En effet, les triangles $FM\varphi$, $FM'\varphi_1$, $\varphi F'\varphi_1$, sont des triangles

Fig. 366.



socèles ayant tous un angle égal à la base; ils sont dès lors semblables et ont leurs côtés parallèles. La figure MFM'F' étant un parallélogramme, la diagonale MM' passe par le milieu O de la diagonale FF' et y est divisée en deux parties égales.

Inversement, *les tangentes menées à l'ellipse en deux points symétriques par rapport au centre, sont parallèles* comme limites de sécantes symétriques par rapport au centre, et, par conséquent (556), parallèles entre elles.

622. Les points K et K' (*fig.* 366) appartiennent au cercle principal de l'ellipse (616). Les deux segments FK, FK', étant alors ceux d'une corde quelconque de ce cercle passant par le foyer F, leur produit est constant. On peut donc dire que *le produit des distances d'un foyer à deux tangentes parallèles est constant.* Si l'on mène par le foyer F' la corde LL' du cercle principal qui est parallèle à KK', on a évidemment $FK' = F'L$. On peut donc dire aussi que *le produit des distances des deux foyers à une même tangente est constant.* Si l'on veut connaître cette constante, il suffit de considérer la tangente à l'une des extrémités du petit axe, et l'on obtient immédiatement le carré du demi petit axe ou b^2 pour sa valeur.

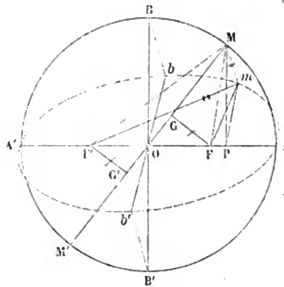
623. Les constructions des nᵒˢ 617 et 620 n'exigent pas que la courbe soit tracée; il faut seulement qu'elle soit définie par ses deux foyers et la longueur du grand axe.

THÉORÈME.

624. *La projection d'une circonférence de cercle sur un plan est une ellipse.*

Les projections d'une figure sur deux plans parallèles étant égales (370), on peut toujours transporter le plan de projection parallèlement à lui-même au centre du cercle.

Fig. 367.



Soient donc AA' le diamètre suivant lequel le plan de projection coupe le cercle donné ABA'B' (*fig.* 367), et bOb' la projection du diamètre BB' perpendiculaire à AA'; cette droite bOb' sera à angle droit sur AA' (322).

M étant un point quelconque du cercle, qui se projette en m, menons le diamètre MM'; prenons sur AA', OF = OF' = Bb, et abaissons des points F et F' les perpendiculaires FG, F'G', sur MM'. L'égalité des triangles rectangles FOG, F'OG', donnera GF = G'F', OG = OG', et, par suite, MG' = M'G.

Cela posé, abaissons MP perpendiculaire sur AA' et menons mP qui sera aussi (322) perpendiculaire sur AA'; les angles aigus BOb, MPm, étant égaux comme angles rectilignes du dièdre formé par le plan du cercle et le plan de projection, les triangles rectangles BOb, MPm, sont semblables,

et l'on a

$$\frac{MP}{Mm} = \frac{BO}{Bb}.$$

D'ailleurs les triangles semblables MOP, OGF, donnent à leur tour

$$\frac{MP}{FG} = \frac{MO}{OF} \quad \text{ou} \quad \frac{MP}{FG} = \frac{BO}{Bb}.$$

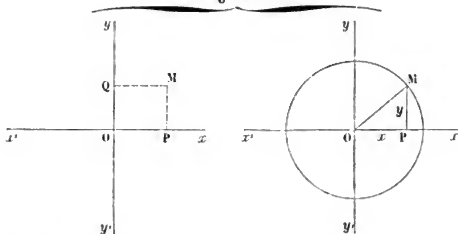
On déduit de là $Mm = FG$.

Par suite, les triangles rectangles MFm, MFG, sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et un côté égal, et l'on a $mF = MG$; de même, l'égalité des triangles rectangles $MF'm$, $MF'G'$, donne $mF' = MG' = M'G$. Donc enfin

$$mF + mF' = MG + M'G = MM' = AA'.$$

Ainsi la projection du cercle est une ellipse dont le grand axe est le diamètre AA' du cercle qui est situé dans le plan de projection (ou qui est parallèle à ce plan). Quant au petit axe, sa valeur dépend de l'inclinaison du plan du cercle sur le plan de projection; il peut prendre toutes les valeurs comprises entre zéro et AA'. D'où l'on voit que *toute ellipse peut être considérée comme la projection de son cercle principal dont le plan aurait tourné d'un angle convenable autour du grand axe.*

Fig. 368.



COROLLAIRES.

625. La position d'un point M dans un plan (*fig.* 368) est déterminée par ses distances MP et MQ à deux axes rectangulaires indéfinis xOx', yOy', tracés dans ce plan. Le nombre qui mesure la distance $MQ = OP$ du point M à l'axe yOy', pris avec le signe + ou avec le signe —, suivant que le point

P tombe sur Ox ou sur Ox', s'appelle l'*abscisse* du point M; on nomme *ordonnée* du point M le nombre qui mesure sa distance MP = OQ à l'axe xOx', pris avec le signe + ou avec le signe —, suivant que le point Q tombe sur Oy ou sur Oy'. L'abscisse et l'ordonnée d'un point constituent ses *coordonnées*. Les axes $x'Ox$, $y'Oy$, sont les *axes des coordonnées* et leur intersection O en est l'*origine*.

Quand un point appartient à une courbe, son ordonnée et son abscisse sont liées l'une à l'autre par une relation qui dépend de la nature de la courbe et qui caractérise cette courbe. Ainsi l'abscisse $x = OP$ et l'ordonnée $y = MP$ d'un point quelconque d'une circonférence de cercle de rayon R, par rapport à deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, passant par le centre, sont unies par la relation

$$y^2 + x^2 = R^2;$$

et inversement, la courbe dont les coordonnées d'un point quelconque M satisfont à cette équation n'est autre que le cercle de rayon R ayant pour centre l'origine O; car on a

$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{d'où} \quad OM = R.$$

Le choix des axes coordonnés est arbitraire. Dans le cercle, on prend ordinairement deux diamètres perpendiculaires; dans l'ellipse, on adopte de préférence les deux axes de symétrie.

Il résulte de ces définitions et du théorème précédent que *l'ordonnée d'un point quelconque de l'ellipse est à l'ordonnée du point du cercle principal qui a la même abscisse dans un rapport constant*. En effet, le cercle ABA' (*fig.* 367) peut être considéré comme le cercle principal de l'ellipse AbA', qu'on aurait fait tourner autour de AA' de l'angle bOB. Or, dans cette rotation, l'ordonnée MP du cercle ne change pas de grandeur, et l'on a par les triangles semblables MPm, BOb,

$$\frac{mP}{MP} = \frac{Ob}{OB} \quad \text{ou} \quad \frac{mP}{MP} = \frac{b}{a},$$

en appelant a et b les demi-axes de l'ellipse.

Ainsi, on passe du cercle principal d'une ellipse à cette ellipse, en diminuant toutes les ordonnées dans le rapport du petit axe au grand axe.

626. Cette manière de considérer l'ellipse conduit à des solutions simples pour un grand nombre de problèmes.

Veut-on, par exemple, les points d'intersection d'une droite LD et d'une ellipse non tracée dont on donne les axes AA′ et BB′ (*fig.* 369)? On dilatera toute la figure perpendiculairement à AA′ dans le rapport de OB à OA. L'ellipse deviendra le cercle AB_1A'; quant à la droite DL, son point L ne changera pas, et pour trouver sa nouvelle position, il suffit de chercher ce que devient l'un quelconque C de ses points; à cet effet, on joint BC qui coupe AA′ en un certain point K; la droite BK devient évidemment B_1K, et par suite le point C_1 est à l'intersection de B_1K et de la perpendiculaire menée par C sur AA′. Dès lors, en prenant les points M et M′ où la droite LC_1 coupe le cercle, et ramenant ces points sur la droite LD par des perpendiculaires à AA′, on obtient les points demandés m et m'.

Comme second exemple, voici un moyen très-simple de tracer par points une ellipse dont on donne les deux axes (*fig.* 370).

Fig. 369.

Fig. 370.

Soient O le centre de l'ellipse, Ox la direction du grand axe, Oy celle du petit axe, et a et b les longueurs du demi grand axe et du demi petit axe. Sur le bord d'une bande de papier, on prendra trois points A, B, M, tels que $AM = a$ et $BM = b$; puis, on déplacera la bande de telle sorte que le point A glisse sur le prolongement de Oy et le point B sur Ox; on marquera avec un crayon sur le papier la position qu'occupe chaque fois le point M; le lieu de ces points sera l'ellipse demandée. En effet, ABM étant une position quelconque de

la bande, menons ON parallèle à AB jusqu'à la rencontre de l'ordonnée MP du point M. On aura évidemment $ON = AM = a$, de sorte que le lieu des points N sera le cercle principal de l'ellipse cherchée. D'ailleurs, les triangles semblables OPN, BPM, donnent

$$\frac{MP}{NP} = \frac{BM}{ON} = \frac{b}{a}.$$

L'ordonnée du point M n'étant que l'ordonnée du point N contractée dans le rapport $\frac{b}{a}$, le point M décrit bien l'ellipse demandée.

627. La considération de l'ellipse comme projection du cercle conduit très-simplement à beaucoup d'autres propriétés de l'ellipse, notamment aux propriétés des *diamètres* (*voir* notre *Traité de Géométrie*). Mais pour ne pas sortir du cadre que nous nous sommes imposé, nous nous bornerons à démontrer que *les diamètres de l'ellipse sont des droites*.

On appelle *diamètre* dans une courbe le lieu des milieux d'un système de cordes parallèles. Considérons donc dans l'ellipse un système de cordes parallèles; ces cordes seront les projections de cordes parallèles dans le cercle dont l'ellipse est la projection, et le milieu de chaque corde de l'ellipse sera la projection du milieu de la corde correspondante du cercle. Or, dans le cercle, le lieu du milieu du système de cordes parallèles est une droite; le diamètre dans l'ellipse sera donc la projection de cette droite, c'est-à-dire une droite passant par le centre.

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'HYPERBOLE.

628. L'*hyperbole* est une courbe plane telle, que la différence des distances de chacun de ses points à deux points fixes de son plan est égale à une longueur constante. Ainsi (*fig.* 371), les deux points fixes étant F et F' et la longueur donnée étant représentée par la droite AA', on aura pour tout point M de l'hyperbole

$$MF - MF' = \pm AA',$$

suivant que le point considéré sera plus éloigné du point F ou du point F'.

D'après cela, pour décrire un arc d'hyperbole d'un *mouvement continu,* on prend une règle F'K dont on fixe l'une des extrémités au point F' (*fig.* 371), de manière qu'elle puisse seulement tourner autour de ce point. Un fil, dont la longueur est moindre que celle de la règle de la constante AA', est fixé par l'une de ses extrémités au point F et par l'autre au point K. Si l'on tend alors constamment ce fil le long de la règle à l'aide d'un crayon, en faisant tourner la règle autour de F', la pointe du crayon trace un arc de l'hyperbole demandée; car, pour une position quelconque M de cette pointe, on a (dans le cas de la figure)

$$MF' - MF = (MF' + MK) - (MF + MK) = AA'.$$

En prenant pour centre de rotation de la règle le point F, et en attachant la seconde extrémité du fil au point F', on obtient la seconde partie de la courbe. Quand la règle est au-dessus de FF', le fil doit être tendu contre son arête inférieure; c'est l'inverse quand la règle est au-dessous de FF'.

On voit que l'hyperbole est formée de deux parties qui ne peuvent avoir aucun point commun, puisqu'on a toujours, pour la partie droite de la figure, MF' > MF, et pour celle de gauche, MF > MF'. Chaque partie est d'ailleurs composée de deux branches qui s'étendent indéfiniment au-dessus et au-dessous de la droite FF'; rien ne limite en effet l'éloignement des points obtenus sur la courbe que la longueur même de la règle et du fil employés. L'hyperbole est donc une courbe *à branches infinies,* aussi bien dans le sens FF' que dans le sens perpendiculaire.

Les points F et F' sont les *foyers* de l'hyperbole, les droites MF et MF' sont les *rayons vecteurs* du point M. La longueur AA' est ordinairement représentée par $2a$. La distance FF' se nomme *distance focale,* et on la représente par $2c$. L'existence du triangle MFF' entraîne la condition $2c > 2a$ ou $c > a$.

Fig. 371.

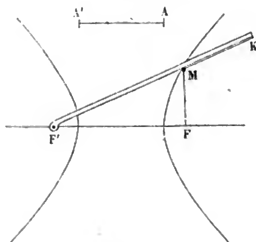
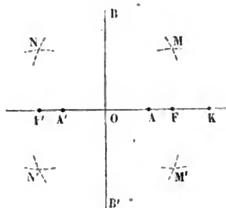


Fig. 372.



Le rapport $\frac{c}{a}$ est l'*excentricité* de l'hyperbole. Cette excentricité peut

varier de 1 à ∞. Pour $c = a$, elle est égale à 1, et l'hyperbole se réduit aux deux portions de la droite FF' qui sont séparées par la distance FF'; pour $a = 0$, elle est infinie, et l'hyperbole se réduit à la perpendiculaire élevée sur le milieu de FF'. Entre ces deux limites, l'hyperbole se rapproche d'autant plus de la droite FF' que l'excentricité est plus petite.

629. On peut tracer l'hyperbole *par points* (*fig*. 372). En effet, marquons le milieu O de la distance focale FF' et, de part et d'autre du point O, prenons $OA = OA' = a$, puis un point K quelconque sur le prolongement de OA. Si des points F et F' comme centres, avec des rayons respectivement égaux à AK et à A'K, nous décrivons des arcs de cercle, leurs points d'intersection M et M' appartiendront à l'hyperbole, car on aura

$$MF' - MF = M'F' - M'F = A'K - AK = 2a.$$

La distance des centres FF' étant toujours plus grande que la différence $2a$ des rayons, il suffit, pour l'intersection des deux circonférences, que cette distance soit moindre que la somme des rayons, c'est-à-dire qu'on ait

$$FF' < AK + A'K \quad \text{ou} \quad 2c < 2\,AK + 2a.$$

La condition cherchée est donc

$$AK > c - a \quad \text{ou} \quad AK > AF.$$

Comme on peut échanger les centres sans modifier les rayons, chaque point K permet d'obtenir quatre points M et M', N et N', de l'hyperbole. Le point K doit seulement être au delà du point F, sans que rien limite sa position à droite de ce point.

Si le point K est en F, les points correspondants de l'hyperbole sont les points A et A'. Le rayon vecteur minimum est $c - a$; il n'y a pas de rayon vecteur maximum, puisque les rayons vecteurs d'un point de la courbe peuvent croître jusqu'à l'infini.

THÉORÈME.

630. *L'hyperbole a : 1° pour axes, la droite* AA' *qui passe par ses deux foyers, et la droite* BB' *perpendiculaire au milieu de la première; 2° pour centre, l'intersection* O *de ces deux droites* (*fig*. 372).

Même démonstration que pour l'ellipse (607), en considérant la différence des rayons vecteurs au lieu de leur somme.

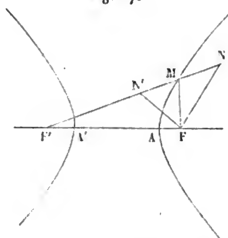
COROLLAIRE.

631. Des deux axes AA' et BB', le premier seul rencontre la courbe. L'axe AA' est dit l'axe *transverse* de l'hyperbole, l'axe BB' est dit son axe *non transverse*. Les extrémités A et A' de l'axe transverse sont les *sommets* de la courbe.

THÉORÈME.

632. *Suivant qu'un point est intérieur ou extérieur à l'hyperbole, la différence de ses distances aux deux foyers est plus grande ou plus petite que* $2a$ (*fig.* 373).

Fig. 373



Le point N étant intérieur, joignons-le aux deux foyers. NF' coupant au point M la branche de courbe qui correspond au foyer F, on a

$$NF < MN + MF, \quad \text{d'où} \quad NF' - NF > NF' - MN - MF,$$

c'est-à-dire

$$NF' - NF > MF' - MF \quad \text{ou} \quad 2a.$$

Le point N' étant extérieur, joignons-le aux deux foyers. F'N' prolongé coupant au point M la branche de courbe qui correspond au foyer F, on a

$$N'F + MN' > MF, \quad \text{d'où} \quad MF' - N'F - MN' < MF' - MF,$$

c'est-à-dire

$$N'F' - N'F < 2a.$$

Suivant que la différence des distances du point considéré aux deux foyers est inférieure, égale ou supérieure à $2a$, *ce point est hors de la courbe, sur la courbe ou dans son intérieur.*

THÉORÈME.

633. *La tangente à l'hyperbole est la bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs du point de contact.*

Même démonstration que pour l'ellipse (611), en remarquant que dans l'ellipse les rayons vecteurs d'un même point varient en sens contraires, tandis que dans l'hyperbole ils varient dans le même sens.

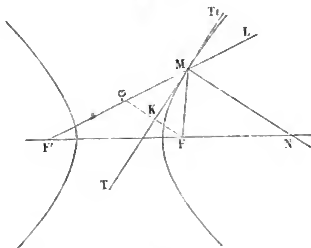
Corollaires.

634. *Tous les points de la tangente* MT, *sauf le point* M, *sont extérieurs à l'hyperbole, qui est, par suite, une courbe convexe.*

Même démonstration que pour l'ellipse (612), en remplaçant la somme des rayons vecteurs par leur différence.

635. Si l'on mène au point M (*fig.* 374) une perpendiculaire MN à la

Fig. 374.



tangente MT, les angles FMN, LMN, sont égaux comme compléments d'angles égaux. Donc, *la normale à l'hyperbole est la bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs du point de contact et le prolongement de l'autre rayon.*

La normale en un sommet de l'hyperbole se confond avec l'axe transverse, et la tangente est perpendiculaire à cet axe.

Si une ellipse et une hyperbole ont les mêmes foyers ou sont *confocales*, elles se coupent à angle droit; car, en l'un quelconque des points d'intersection, la tangente de l'une est la normale de l'autre (611, 613).

THÉORÈME.

636. *Le lieu des points symétriques* φ *de l'un des foyers* F *par rapport aux tangentes est un cercle (directeur) décrit de l'autre foyer* F' *avec la longueur* $2a$ *de l'axe transverse pour rayon* (*fig.* 374).

Le lieu des points équidistants d'un cercle de centre F' *et d'un point extérieur* F *est une hyperbole dont les foyers sont les points* F *et* F', *et dont le cercle directeur relatif au foyer* F' *est le cercle donné.*

Même démonstration que pour l'ellipse (614, 615), en remplaçant toujours la somme des rayons vecteurs par leur différence. L'hyperbole a, comme l'ellipse, deux cercles directeurs.

THÉORÈME.

637. *Le lieu des projections des foyers d'une hyperbole sur ses tangentes est la circonférence décrite sur l'axe transverse comme diamètre* (*fig.* 375).

Même démonstration que pour l'ellipse (616). Le cercle obtenu est dit cercle *principal* de l'hyperbole.

COROLLAIRES.

638. Soient (*fig.* 375) la tangente MT, les rayons vecteurs MF, MF′, de son point de contact, φ le symétrique du foyer F par rapport à la tangente MT, K la projection de ce foyer sur la tangente. Les rayons OK

Fig. 375.

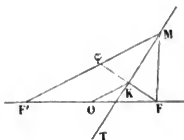
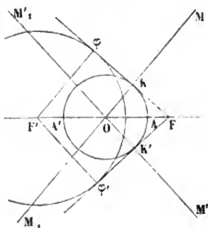


Fig. 376.



et F′φ du cercle principal et du cercle directeur relatif au foyer F′ restent toujours parallèles entre eux pendant que, le point φ parcourant le cercle directeur, la droite Fφ tourne autour du foyer F. Au moment où cette droite devient tangente au cercle directeur, elle le devient donc aussi au cercle principal. Soient φ et K ses points de contact avec ces deux cercles (*fig.* 376). La tangente qui passe par le point K, étant perpendiculaire à Fφ, n'est alors autre chose que le prolongement du rayon OK et devient parallèle au rayon F′φ, de sorte que son point de contact M s'éloigne à l'infini (636). La droite OKM ainsi obtenue, qui touche la branche supérieure de la demi-hyperbole de droite à l'infini, est appelée *asymptote* de l'hyperbole.

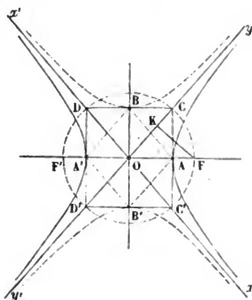
La seconde tangente commune menée au cercle principal et au cercle directeur F′ par le foyer F donne une seconde asymptote OK′M′, qui touche à l'infini la branche inférieure de la demi-hyberbole de droite.

Les droites OKM, OK′M′, étant également inclinées de part et d'autre de l'axe transverse (157), si l'on fait faire à l'hyperbole une demi-révolution autour de son axe non transverse, les foyers ne font que s'échanger, ainsi que les deux demi-hyperboles, de sorte que le prolongement OM_1 de la droite OKM est asymptote à la branche inférieure de la demi-hyperbole de gauche, tandis que le prolongement OM'_1 de la droite OK′M′ est asymptote à la branche supérieure de cette demi-hyperbole.

En résumé, *l'hyperbole a pour asymptotes les deux droites indéfinies tracées par son centre, parallèlement aux rayons du cercle directeur* F′ *qui correspondent aux tangentes communes menées du foyer* F *au cercle* F′ *et au cercle principal de la courbe.* Ces droites sont d'un grand secours pour la construction de l'hyperbole, puisqu'elles font connaître les directions vers lesquelles tendent ses branches infinies.

639. Soient (*fig.* 377) les asymptotes xx', yy', de l'hyperbole dont les foyers sont F et F' et les axes AA' et BB'. Menons au point A la perpendiculaire AC à l'axe transverse, jusqu'à la rencontre de l'asymptote yy'.

Fig. 377.



D'après ce qui précède (637), si l'on abaisse aussi FK perpendiculaire sur yy', on aura $OK = a$. Les deux triangles rectangles OAC, OKF, sont donc égaux (49), et $OC = OF = c$. On voit que a et c étant donnés, on en déduit AC; de même a et AC étant connus, on en déduit c.

Achevons le rectangle CC'D'D. Par analogie avec l'ellipse (608), la longueur $BB' = 2AC$, ainsi déterminée, est appelée *la longueur de l'axe non transverse* de l'hyperbole, et on la représente par $2b$. Remarquons que le parallélogramme ABA'B' a ses côtés parallèles aux asymptotes.

Les trois longueurs a, b, c, sont liées entre elles par la relation $c^2 = a^2 + b^2$. Elles sont liées dans l'ellipse par la relation $c^2 = a^2 - b^2$, qui ne diffère de la précédente que par le changement de b^2 en $-b^2$. Par suite, *les propriétés de l'ellipse et de l'hyperbole qui ne dépendent que des longueurs de leurs axes, se déduisent les unes des autres par le simple changement de* b^2 *en* $-b^2$.

640. Lorsqu'on donne les longueurs des axes de l'hyperbole, il est facile de déterminer graphiquement les foyers. On n'a qu'à élever à l'extrémité A de l'axe transverse une perpendiculaire $AC = b$ (*fig.* 377), et à décrire du point O comme centre, avec OC pour rayon, une circonférence qui coupe l'axe transverse aux deux foyers F et F'. On trouve en même temps l'asymptote OC et sa symétrique OC' (638).

641. On appelle hyperbole *équilatère* une hyperbole dont les deux axes ont la même longueur. Le rectangle CC'D'D (*fig.* 377) devenant alors un carré, on voit que *les asymptotes d'une hyperbole équilatère sont à angle droit l'une sur l'autre.*

On entend par *hyperboles conjuguées* deux hyperboles qui, ayant les mêmes axes et, par suite, le même centre, la même distance focale et les mêmes asymptotes, sont situées par rapport à ces asymptotes dans des angles différents; c'est-à-dire que l'axe transverse de l'une est l'axe non transverse de l'autre, et réciproquement (*fig.* 377).

PROBLÈME.

642. *Mener une tangente à l'hyperbole par un point donné.*

Mêmes procédés que pour l'ellipse (617).

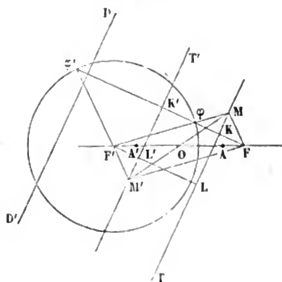
COROLLAIRES.

643. *Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'hyperbole est une circonférence concentrique à la courbe et ayant pour rayon* $\sqrt{a^2 - b^2}$ (618, 639).

La démonstration directe est la même que pour l'ellipse. Seulement, la question revient ici à chercher le lieu des milieux des cordes interceptées dans le cercle directeur relatif au foyer F', par un angle droit dont le sommet F lui est extérieur. Le problème peut alors être impossible, et le lieu cesser d'exister si l'on a $a < b$.

644. *Les tangentes* PM, PM', *menées à l'hyperbole par un point extérieur* P, *font des angles égaux avec les droites qui vont du point* P *aux deux foyers; la droite qui va du point* P *à l'un des foyers est bissectrice de l'angle intérieur ou extérieur des rayons vecteurs qui vont de ce foyer aux deux points de contact* M *et* M', *suivant que les deux tangentes touchent l'hyperbole dans la même région ou dans deux régions différentes.*

Fig. 378.



PROBLÈME.

645. *Mener à l'hyperbole une tangente parallèle à une droite donnée* (*fig.* 378).

Même procédé que pour l'ellipse (620). Seulement le problème n'est pas toujours possible. Il faut que, si l'on mène par le centre de la courbe une parallèle à la droite donnée, elle ne tombe pas dans les angles des asymptotes qui renferment l'hyperbole.

COROLLAIRES.

646. *Les deux tangentes parallèles à une droite donnée ont leurs points de contact symétriques par rapport au centre* (621).

647. *Le produit des distances d'un foyer à deux tangentes parallèles ou le produit des distances des deux foyers à une même tangente, est constant* (622).

Les constructions des nos 642 et 645 n'exigent pas que l'hyperbole soit tracée.

---

§ XII.

PROGRAMME OFFICIEL : *Définition de la parabole par la propriété du foyer et de la directrice. — Tracé par points et d'un mouvement continu. — Axe. — Sommet. — Rayon vecteur. — La tangente fait des angles égaux avec la parallèle à l'axe et le rayon vecteur menés par le point de contact. — Mener la tangente à la parabole par un point pris sur la courbe, par un point extérieur. — Normale. — Sousnormale. — Relation entre le carré d'une ordonnée perpendiculaire à l'axe et la distance de cette ordonnée au sommet.*

DÉFINITION ET TRACÉ DE LA COURBE.

648. La *parabole* est une courbe plane telle, que chacun de ses points est équidistant d'un point fixe et d'une droite fixe donnés dans son plan. Ainsi (*fig.* 379), le point fixe étant F et la droite fixe DD′, on aura, pour tout point M de la parabole, en abaissant MH perpendiculaire sur DD′, MF = MH. Par sa définition même, la parabole est nécessairement située tout entière du même côté que le point fixe par rapport à la droite fixe.

D'après ce qu'on vient de dire, pour décrire un arc de parabole *d'un mouvement continu*, on fait coïncider l'arête d'une règle avec la droite DD′, et l'on applique contre cette règle le petit côté KH d'une équerre KHG. Un fil, égal en longueur au

grand côté HG de cette équerre, est fixé par ses deux extrémités, d'une part au point F, et de l'autre à l'extrémité G du côté HG. Si l'on tend alors constamment ce fil contre le grand côté de l'équerre à l'aide d'un crayon, et si l'on fait en même temps glisser l'équerre le long de la règle, la pointe du crayon décrit un arc de parabole. En effet, pour une position quelconque M de cette pointe, on a

$$GM + MF = GH = GM + MH, \quad \text{d'où} \quad MF = MH.$$

En opérant de cette manière, on trace d'un mouvement continu l'arc BA, qui va du point B de la courbe dont la distance au point F est égale à GH, jusqu'au point A milieu de la perpendiculaire FL abaissée du point F sur la droite DD'. Il faut ensuite retourner l'équerre, comme l'indique la figure, pour décrire l'arc AB'.

On voit que la parabole s'étend indéfiniment, à partir du point A, au-dessus et au-dessous de la droite FL; car si l'on emploie une règle, une équerre et un fil assez longs, rien ne limite l'éloignement des points obtenus sur la courbe.

Le point F est le *foyer* de la parabole, la droite DD' est sa *directrice*. La droite MF est le *rayon vecteur* du point M. La distance FL du foyer à la directrice se nomme le *paramètre* de la courbe, et on la représente par p.

Fig. 379.

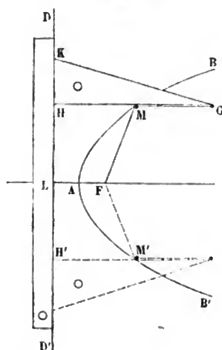
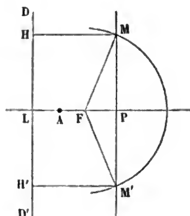


Fig. 380.



649. On peut aussi tracer la parabole *par points*.

En effet, prenons (*fig.* 380) un point P quelconque sur la perpendiculaire FL abaissée du foyer sur la directrice. Par le point P, menons une perpendiculaire à FL ou une parallèle à la directrice, et du foyer F comme centre, avec PL pour rayon, décrivons une circonférence qui coupera cette parallèle en deux points M et M′ appartenant à la parabole, comme équidistants du foyer et de la directrice.

Pour que les points d'intersection M et M′ existent, il suffit que le point P soit à l'intérieur du cercle décrit du foyer F comme centre avec PL pour rayon, c'est-à-dire qu'on ait $FP < PL$. Cette condition sera toujours remplie lorsque le point P sera à droite du foyer F (dans le cas de la figure); mais elle exige, si le point P est à gauche de F, qu'il reste à droite du point A, milieu de FL. Si l'on a dans ce cas, comme condition limite, $FP = PL$, le point P se confond avec le point A, et les deux points M et M′ se réunissent en ce point. Le rayon vecteur minimum est donc AF ou $\frac{p}{2}$; il n'y a pas de rayon vecteur maximum, rien ne limitant l'éloignement du point P à droite du foyer F.

THÉORÈME.

650. *La parabole a pour axe la perpendiculaire menée du foyer sur la directrice* (*fig.* 379).

Même démonstration que pour l'ellipse (607, 1°).

Le point A, commun à la parabole et à son axe, est le *sommet* de la courbe.

THÉORÈME.

651. *Suivant qu'un point est intérieur ou extérieur à la parabole, sa distance au foyer est moindre ou plus grande que sa distance à la directrice* (*fig.* 381).

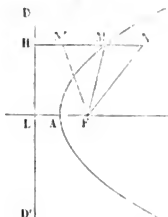
Soit d'abord un point N intérieur à la courbe. Menons la droite NF et la perpendiculaire NH à la directrice; cette perpendiculaire coupera la parabole au point M (648). Le triangle NFM donne alors

$$NF < NM + MF \quad \text{ou} \quad NF < NH, \quad \text{puisque} \quad MF = MH.$$

Soit de même un point N′ extérieur à la courbe. Si le point

N′ et le foyer sont de côtés différents par rapport à la directrice, la proposition est évidente. Sinon, menons la droite N′F et la perpendiculaire N′H à la directrice; cette perpendi-

Fig. 381.



culaire prolongée coupera la parabole au point M. Le triangle N′FM donne alors

$$N'F > MF - MN' \quad \text{ou} \quad N'F > N'H, \quad \text{puisque} \quad MF = MH.$$

Il résulte de là que :

Suivant que la distance d'un point au foyer est égale, supérieure ou inférieure à sa distance à la directrice, ce point est sur la courbe, hors de la courbe ou dans son intérieur.

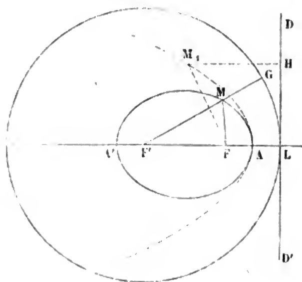
THÉORÈME.

652. *La limite d'une ellipse (ou d'une hyperbole) dont un sommet et le foyer voisin restent fixes, tandis que l'autre foyer s'en éloigne indéfiniment dans la direction du grand axe (ou de l'axe transverse), est une parabole qui a pour sommet et pour foyer le sommet et le foyer fixes* (*fig.* 382).

En effet, le cercle directeur relatif au foyer mobile F′ coupe toujours le grand axe à droite du foyer fixe F, en un même point L déterminé par la condition évidente AL = AF. A mesure que le centre F′ de ce cercle s'éloigne dans la direction AA′, son rayon croît indéfiniment, de sorte qu'il a pour limite la perpendiculaire DD′ menée par le point L au grand axe AA′. D'ailleurs, tout point M de l'ellipse étant également distant du foyer F et du cercle directeur F′ (615), on a constamment MF = MG, c'est-à-dire à la limite, quand, l'ellipse se

déformant, le point M vient en M_1, $M_1F = M_1H$, en désignant par M_1H la perpendiculaire abaissée du point M_1 sur la droite

Fig. 382.



DD′, limite du cercle F′. Le lieu des positions limites des points de l'ellipse donnée est donc une parabole ayant pour foyer et pour sommet les points F et A, et par suite la droite DD′ pour directrice.

COROLLAIRE.

653. Le théorème précédent permet de prévoir et de démontrer les propriétés de la parabole, en les déduisant par voie de transformation des propriétés correspondantes de l'ellipse.

Si ces propriétés dépendent explicitement des axes a et b de l'ellipse et de son excentricité c, on substitue à a et à b leurs valeurs en fonction de c et du paramètre $p = 2(a - c)$ de la parabole limite ; puis, en supposant c infini dans les formules obtenues, on passe des propriétés de l'ellipse représentées par ces formules, aux propriétés correspondantes de la parabole exprimées en fonction du paramètre p.

THÉORÈME.

654. *La tangente à la parabole fait extérieurement des angles égaux avec le rayon vecteur du point de contact et avec la parallèle menée à l'axe par le même point.*

Prenons sur la parabole (*fig.* 383) deux points voisins M et

M′; menons la sécante MM′S, abaissons des deux points considérés les perpendiculaires Mφ, M′φ', sur la directrice DD′, et traçons leurs rayons vecteurs. Portons sur FM une longueur FC = FM′, et sur φM une longueur φE = φ'M′. D'après la définition de la parabole, MC est égal à ME.

D'un point G quelconque de la sécante MM′S, menons à M′C et à M′E, jusqu'à la rencontre de FM et de φM, les parallèles GI et GH. Les deux quadrilatères CM′EM, IGHM, sont semblables (185), et l'égalité de MC et de ME entraîne celle de MI et de MH.

Fig. 383.

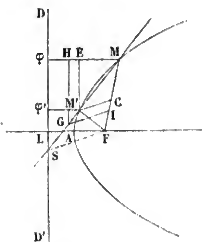
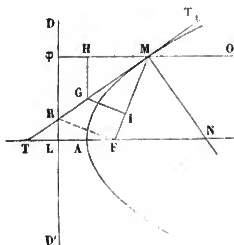


Fig. 384.



A mesure que le point M′ se rapproche du point M, GH reste comme M′E perpendiculaire à Mφ, tandis que GI, perpendiculaire à la bissectrice de l'angle au sommet du triangle isocèle M′FC, tend à le devenir au rayon vecteur FM. On a de plus constamment MI = MH. La tangente à la parabole (*fig.* 384) doit donc être telle, que si, d'un point quelconque G pris sur cette droite, on abaisse des perpendiculaires GI et GH sur le rayon vecteur du point de contact M et sur la perpendiculaire abaissée de ce point sur la directrice, on ait MI = MH. Les triangles rectangles MGI, MGH, sont alors égaux (49), ainsi que les angles GMI, GMH. *La tangente à la parabole est donc bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact et la perpendiculaire abaissée de ce point sur la directrice.*

Mais l'angle GMH étant l'opposé par le sommet de l'angle T_1MO, les deux angles GMI ou TMF et T_1MO sont égaux ; ce qui conduit à l'énoncé adopté.

COROLLAIRES.

655. Soit S le point où la sécante MM'S (*fig.* 383) coupe la directrice DD'. On a, à cause des parallèles,

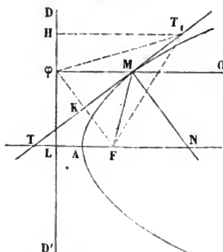
$$\frac{MS}{M'S} = \frac{M\varphi}{M'\varphi'} = \frac{MF}{M'F};$$

la droite SF est donc la bissectrice de l'angle extérieur en F du triangle MFM' (172). *La droite qui joint le foyer d'une parabole au point de rencontre d'une sécante quelconque avec la directrice est donc bissectrice de l'angle extérieur des rayons vecteurs des points d'intersection de la sécante avec la courbe.*

A la limite, quand la sécante devient tangente, c'est-à-dire quand l'angle MFM' devient nul, la droite SF est remplacée (*fig.* 384) par la droite RF, bissectrice de l'angle supplémentaire. Par suite, *la droite qui joint le foyer d'une parabole au point où une tangente quelconque rencontre la directrice, est perpendiculaire sur le rayon vecteur du point de contact.*

656. *Tous les points de la tangente* MT, *sauf le point de contact* M, *sont extérieurs à la parabole* qui, dès lors (612), est une courbe convexe (*fig.* 385).

Fig. 385.



En effet, le triangle FMφ étant isocèle, et la tangente étant la bissectrice de son angle au sommet (654), elle est perpendiculaire sur le milieu K de Fφ. Pour un point T_1 quelconque de la tangente, on a donc, T_1H étant la perpendiculaire abaissée

de ce point sur la directrice, $T_1H < T_1\varphi$ ou $T_1H < T_1F$. Le point T_1 est donc extérieur à la courbe (651).

657. Si l'on mène au point M (*fig.* 385) une perpendiculaire MN à la tangente MT, les deux angles FMN, OMN sont égaux comme compléments d'angles égaux (654). Donc, *la normale à la parabole est bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact et la parallèle menée à l'axe par ce point.*

Au sommet de la parabole, la normale se confond avec l'axe, et la tangente est perpendiculaire à cet axe.

Soient T et N (*fig.* 385) les points où la tangente et la normale rencontrent l'axe. Les triangles TMF, NMF, étant évidemment isocèles, on a MF = FT = FN. *Le foyer* F *est* donc *à une distance, soit du pied de la tangente, soit du pied de la normale sur l'axe, égale au rayon vecteur du point de contact.*

Dans le cas de la parabole, les rayons lumineux, sonores ou calorifiques, qui partent du foyer, deviennent tous parallèles à l'axe après leur réflexion sur la courbe. C'est pourquoi l'on emploie des réflecteurs paraboliques, lorsqu'on veut projeter au loin un faisceau de rayons lumineux parallèles (lanternes de voitures, phares). Réciproquement, tout rayon qui vient rencontrer la parabole parallèlement à son axe se réfléchit au foyer de la courbe. De là, par exemple, l'usage des réflecteurs paraboliques dans les télescopes, pour concentrer au foyer les rayons lumineux venant de l'astre observé.

THÉORÈME.

658. *Le lieu des points symétriques* φ *du foyer* F *par rapport aux diverses tangentes à la parabole est la directrice* (*fig.* 385).

Cette proposition résulte du n° 614.

SCOLIES.

659. *Étant donnés un point* F *et une droite* DD′ (*fig.* 385), *si l'on mène des droites* Fφ *aux différents points de la droite* DD′, *les perpendiculaires élevées à ces droites par leurs milieux enveloppent une parabole qui a pour foyer le point* F *et pour directrice la droite* DD′ ; *les points de contact de ces tan-*

gentes sont à leurs rencontres avec les perpendiculaires menées à la directrice par les points φ.

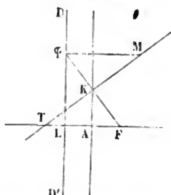
660. *Les parallèles à l'axe de la parabole ne rencontrent la courbe qu'en un seul point.*

THÉORÈME.

661. *Le lieu des projections du foyer d'une parabole sur ses tangentes est la tangente au sommet.*

MT étant la tangente à la courbe au point M (*fig.* 386), et φ le symétrique du foyer F par rapport à cette tangente, le

Fig. 386.



point K où Fφ coupe la tangente est le milieu de Fφ. D'ailleurs, le sommet A est le milieu de FL. Donc, dans le triangle FLφ, AK est parallèle à la directrice ou se confond avec la tangente au sommet (657). La projection K du foyer sur une tangente se trouve par suite sur la tangente au sommet.

Réciproquement, K étant un point de la tangente au sommet, si l'on mène la droite FKφ, le point φ sera le symétrique du foyer F par rapport à la tangente qui passe par le point K (659); le point K sera donc la projection du foyer F sur cette tangente.

Il résulte de là que si l'un des côtés d'une équerre passe constamment par le foyer F, tandis que son sommet parcourt la tangente AK au sommet, l'autre côté de l'équerre reste constamment tangent à la parabole.

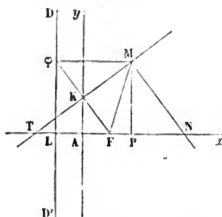
THÉORÈME.

662. *Dans la parabole : 1° la sous-tangente est double de l'abscisse du point de contact; 2° la sous-normale est constante et égale au paramètre* (*fig.* 387).

Si l'on prend pour axes coordonnés l'axe Ax de la courbe et la tangente au sommet Ay, le point M aura MP pour ordonnée et AP pour abscisse. Menons la tangente MT et la normale MN; la projection TP sur l'axe Ox de la portion de tangente MT comprise entre son point de contact M et son point de rencontre T avec l'axe s'appelle la *sous-tangente*, et l'on nomme *sous-normale* la projection PN sur Ox de la portion de normale comprise entre le point M et son point de rencontre N avec Ox. Cela posé :

1° Le triangle TFM étant isocèle (657), la projection K du foyer F sur la tangente MT est le milieu de MT. La tangente au sommet AKy étant parallèle à l'ordonnée MP, le sommet A est alors le milieu de la sous-tangente TP, et $TP = 2AP$.

Fig. 387.



2° La normale MN et la droite $F\varphi$ sont parallèles comme perpendiculaires à la tangente MT. La figure $M\varphi FN$ est donc un parallélogramme, et $\varphi F = MN$. Les deux triangles rectangles MPN, φLF, sont alors égaux (49), et l'on a $PN = LF = p$.

Corollaire.

663. *Le carré de l'ordonnée d'un point de la parabole est proportionnel à l'abscisse de ce point* (*fig.* 387).

Le triangle rectangle TMN donne

$$\overline{MP}^2 = TP.PN;$$

d'où, en désignant par x l'abscisse AP et par y l'ordonnée MP du point M, et ayant égard au théorème précédent,

$$y^2 = 2x.p$$

ou

$$y^2 = 2px.$$

PROBLÈME.

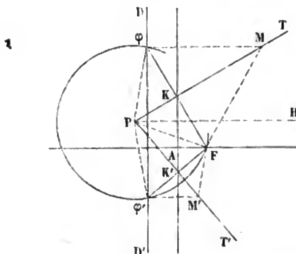
664. *Mener une tangente à la parabole par un point donné.*

1° *Si le point donné* M *est sur la courbe* (*fig.* 387), on mène le rayon vecteur MF et la perpendiculaire Mφ sur la directrice, puis la bissectrice de l'angle FMφ qui est la tangente demandée (654).

Il vaut mieux prendre sur l'axe, du côté du sommet, une longueur FT égale à MF; en joignant le point T ainsi obtenu au point donné M, on a (662, 1°) la tangente demandée.

2° *Si le point donné* P *est extérieur à la parabole,* on remarque que la question serait résolue si l'on connaissait le symétrique φ du foyer F par rapport à la tangente cherchée; car on aurait alors cette tangente en abaissant du point P une perpendiculaire PMT sur Fφ (*fig.* 388). La droite PMT couperait d'ailleurs la parallèle menée à l'axe par le point φ, au point de contact M. Or, le point φ se trouve à la fois sur la directrice DD′ (658) et sur le cercle décrit du point P comme centre avec PF pour rayon.

Fig. 388.



Ce cercle et la directrice se coupent toujours, quand le point P est extérieur à la courbe; car il est alors plus près de la directrice que du foyer (651) : il y a donc deux solutions, qui se réduisent à une seule quand le point P est sur la parabole, ou disparaissent lorsqu'il est intérieur à la courbe.

COROLLAIRES.

665. Cherchons la condition pour que les deux tangentes menées du point P à la parabole soient à angle droit.

Ces tangentes étant supposées à angle droit, comme elles sont respectivement perpendiculaires aux milieux des droites Fφ et Fφ', l'angle φFφ' est aussi droit. Par suite, $\varphi\varphi'$ est un diamètre de la circonférence PF, et le point P est sur la directrice. *Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la parabole est donc la directrice.*

Dans ce cas, l'angle PFM est droit ainsi que l'angle PFM' (655) : la corde des contacts MM' passe donc alors par le foyer et est perpendiculaire à PF.

666. *Les tangentes* PM, PM', *menées d'un point extérieur* P *à une parabole, font des angles égaux avec la droite qui joint ce point au foyer et avec la parallèle menée à l'axe par ce point; la droite qui va du foyer au point* P *est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs des points de contact* M *et* M'.

Cette propriété est une conséquence immédiate des nos 619 et 652.

PROBLÈME.

667. *Mener à la parabole une tangente parallèle à une droite donnée.*

Tout revient encore à trouver le point φ symétrique du foyer F par rapport à la tangente cherchée. Or, ce point se trouvera à l'intersection de la directrice et de la perpendiculaire abaissée du foyer F sur la droite donnée. Il y a toujours une solution, et une seule.

Les constructions des nos 664 et 667 n'exigent pas que la courbe soit tracée; il suffit d'en connaître le foyer et la directrice.

L'ellipse, l'hyperbole et la parabole, sont les courbes qu'on peut obtenir en coupant par un plan un cône à base circulaire. Aussi leur attribue-t-on la dénomination commune de *sections coniques* (*voir* notre *Traité de Géométrie*).

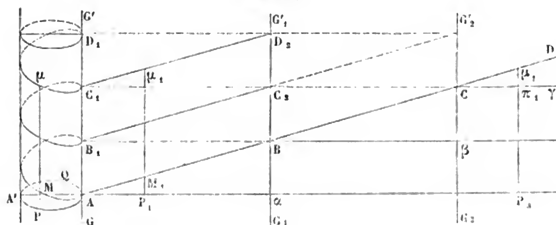
§ XIII.

Programme officiel : *Définition de l'hélice considérée comme résultant de l'enroulement du plan d'un triangle rectangle sur un cylindre droit à base circulaire. — Pas de l'hélice. — La tangente à l'hélice fait avec l'arête du cylindre un angle constant. — Construire la projection de l'hélice et de la tangente sur un plan perpendiculaire à la base du cylindre.*

DÉFINITION ET TRACÉ DE LA COURBE.

668. Considérons un cylindre circulaire droit indéfini ayant pour génératrice la droite GG′ (*fig.* 389). Si l'on enroule l'angle indéfini BAα sur la surface cylindrique, de manière que le côté Aα s'applique exactement sur la section droite qui passe par le point A, la courbe que le côté AB trace en s'appliquant sur la surface est une *hélice*.

Fig. 389.



Dans le mouvement indiqué, les perpendiculaires abaissées des différents points de AB sur Aα coïncident avec les différentes génératrices du cylindre. Si la longueur Aα est égale à celle de la circonférence de la section droite du cylindre, le point α venant rejoindre le point A, le point B vient se placer en B_1 sur la génératrice GG′, à une distance AB_1 du point A égale à Bα. On peut alors répéter pour le point B ce qu'on vient de dire pour le point A. Si la parallèle Bβ à Aα lui est égale, le point C de la droite AB, qui se projette en β sur Bβ, viendra se placer en un point C_1 de la génératrice GG′, tel que l'on ait $B_1C_1 = C\beta = AB_1$, etc.

Les portions égales de l'hélice qui correspondent ainsi aux divisions égales de la droite indéfinie AD, dont les projections sur le plan de la section droite du cylindre ont des longueurs égales à celle de la circonférence de cette section droite, s'appellent *spires*.

Les longueurs égales AB_1, B_1C_1, etc., interceptées par deux spires successives sur une génératrice *quelconque* du cylindre, représentent le *pas* de l'hélice. Changer, en effet, la génératrice sur laquelle on mesure le pas, c'est prendre un autre point de la surface cylindrique pour origine de l'hélice, sans rien changer aux conditions précédentes.

669. En remarquant que l'hélice se reproduit par spires identiques qui commencent et se terminent d'une manière continue sur une même génératrice, on peut concevoir autrement la génération de l'hélice.

Faisons glisser le triangle $BC\beta$ sur BB_1 et amenons-le en B_1C_2B; amenons de même le triangle $CD\gamma$ en $C_1D_2C_2$, etc. Si l'on enroule ces triangles sur la surface cylindrique, les droites parallèles AB, B_1C_2, C_1D_2, etc., engendreront séparément les différentes spires de l'hélice.

En supposant donc le cylindre développé (432) suivant le rectangle indéfini $GG'G_1G'_1$ (*fig.* 389), en divisant à partir du point A la génératrice GG' en parties égales à $B\alpha$, en menant par les points B_1, C_1, D_1,..., ainsi obtenus, des parallèles à AB jusqu'à la rencontre de $G_1G'_1$, et en enroulant la figure formée sur le cylindre, les droites distinctes AB, B_1C_2, C_1D_2,..., reproduiront l'hélice continue tracée par l'enroulement de la droite indéfinie ABCD....

670. Si l'on considère un point quelconque M de la première spire de l'hélice (*fig.* 389) et si l'on conçoit la génératrice MP qui passe par ce point et qui rencontre en P la section droite du cylindre menée par l'origine A de l'hélice, la longueur MP est l'*ordonnée* y du point M et l'arc AP est son *abscisse curviligne* x.

Lorsque le point M appartient à une spire quelconque, son abscisse curviligne surpasse la circonférence AA'. Soit, par exemple (*fig.* 389), le point μ situé sur la troisième spire et sur la même génératrice que le point M; il correspond au

point μ_1 de la droite ABCD..., tel que $C\pi_1 = AP_1 =$ arc AP. Son abscisse curviligne est donc égale à deux fois la circonférence de la section droite plus l'arc AP, et son ordonnée à deux fois le pas $B\alpha$ plus MP.

THÉORÈME.

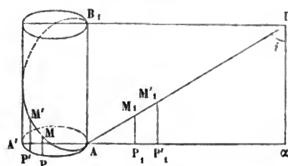
671. *L'ordonnée d'un point de l'hélice est proportionnelle à son abscisse curviligne* (*fig.* 389).

Prenons un point quelconque μ sur l'hélice et menons son ordonnée $y = \mu P$. Quand on déroulera le cylindre, le point μ viendra en μ_1 sur la droite ABCD...; les ordonnées $\mu_1 P_3$ et μP seront égales, ainsi que l'abscisse rectiligne AP_3 et l'abscisse curviligne $x = AA'QAA'QAP$. Le rapport $\frac{\mu_1 P_3}{AP_3}$ étant constamment égal au rapport $\frac{B\alpha}{A\alpha} = \frac{h}{2\pi r}$ (en désignant par r le rayon du cylindre et par h le pas de l'hélice), il en est de même du rapport $\frac{y}{x}$.

Réciproquement, *si l'ordonnée d'une courbe tracée sur la surface d'un cylindre de révolution est proportionnelle à son abscisse curviligne, cette courbe est une hélice.*

Soit en effet (*fig.* 390) la courbe AMB_1; lorsqu'on développe la surface du cylindre sur le plan tangent suivant la génératrice AB_1 (461), la circonférence de la section droite en A

Fig. 390.



s'applique sur la droite $A\alpha$ menée perpendiculairement à AB_1 dans ce plan, et les arcs AP et AP′ sont rectifiés en AP_1 et AP'_1. Deux points quelconques M et M′ de la courbe AMB_1 viennent se placer sur les perpendiculaires élevées à $A\alpha$ par P_1 et P'_1, en deux positions M_1 et M'_1 telles, que

$$M_1P_1 = MP, \quad M'_1P'_1 = M'P'.$$

Mais on a, par hypothèse, $\frac{MP}{AP} = \frac{M'P'}{AP'}$; donc

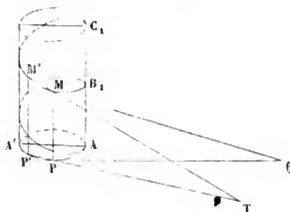
$$\frac{M_1P_1}{AP_1} = \frac{M'_1P'_1}{AP'_1},$$

et les points A, M_1, M'_1, sont en ligne droite, de sorte que la courbe AMB_1 résulte de l'enroulement du triangle rectangle $AB\alpha$.

THÉORÈME.

672. *La sous-tangente en un point de l'hélice est égale à l'abscisse curviligne de ce point* (*fig.* 391).

Fig. 391.



La *sous-tangente* en un point M de l'hélice est la projection $P\theta$, sur le plan de la section droite, de la portion $M\theta$ de tangente comprise entre son point de contact M et sa trace θ sur le plan de la section droite.

Considérons sur la courbe les deux points voisins M et M', dont les ordonnées sont MP et M'P' et les abscisses curvilignes AA'AP et AA'AP'. On a (671)

$$(1) \qquad \frac{MP}{AA'AP} = \frac{M'P'}{AA'AP'}.$$

Prolongeons la corde MM' jusqu'au point T où elle rencontre le prolongement de la corde PP' de la circonférence de base. Les deux triangles semblables MTP, M'TP', donnent

$$\frac{MP}{TP} = \frac{M'P'}{TP'}.$$

Par suite, en vertu de l'équation (1),

$$\frac{\mathrm{TP}}{\mathrm{AA'\,AP}} = \frac{\mathrm{TP'}}{\mathrm{AA'AP'}}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\mathrm{TP'} - \mathrm{TP}}{\mathrm{AP'} - \mathrm{AP}} = \frac{\mathrm{TP'}}{\mathrm{AA'AP'}}.$$

On peut écrire cette dernière égalité sous la forme

$$\frac{\mathrm{TP'}}{\mathrm{AA'AP'}} = \frac{\text{corde}\,\mathrm{PP'}}{\text{arc}\,\mathrm{PP'}}.$$

Lorsque le point M′ se rapproche indéfiniment du point fixe M, le point P′ se rapproche indéfiniment du point P. La sécante M′MT devient la tangente Mθ à l'hélice au point M, et la sécante P′PT devient la tangente en P au cercle de base. La limite du rapport $\frac{\text{corde}\,\mathrm{PP'}}{\text{arc}\,\mathrm{PP'}}$ étant l'unité, on a finalement

$$\text{lim.}\,\frac{\mathrm{TP'}}{\mathrm{AA'AP'}} = \frac{\mathrm{P}\theta}{\mathrm{AA'\,AP}} = 1, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{P}\theta = \mathrm{AA'AP}.$$

Corollaires.

673. Le triangle MPθ restant toujours semblable à lui-même, *la tangente à l'hélice fait un angle constant, aussi bien avec les génératrices du cylindre qu'avec le plan d'une section droite*. Ces deux angles sont complémentaires.

Pour construire la tangente en un point M de l'hélice, il suffit, d'après le théorème précédent, de prendre sur la tangente à la base, à partir du point P, pied de l'ordonnée du point M, une longueur Pθ égale à l'arc AP rectifié, et de joindre le point θ au point M.

Scolie.

674. Tout ce qui précède s'applique sans modifications aux cylindres droits à bases quelconques. Il faut seulement s'appuyer sur ce théorème : *La limite d'un arc de courbe quelconque à sa corde est l'unité, lorsque l'arc tend vers zéro.*

PROBLÈME.

675. *Construire la projection de l'hélice et de la tangente sur un plan perpendiculaire à la base du cylindre.*

Soient *acbd* la section droite du cylindre, et *xy* une droite

tracée dans son plan parallèlement au diamètre *ab* qui passe par le point de départ *a* de l'hélice. Concevons par *xy* un plan parallèle à l'axe du cylindre; c'est sur ce plan qu'il s'agit de projeter une spire de l'hélice.

Donnons au cylindre une hauteur égale au pas *a′a″* de l'hélice; la projection du cylindre sera alors le rectangle *a′a″b″b′*. Divisons l'arête *a′a″* et la circonférence de base *acbd* en un même nombre de parties égales; sur la *fig.* 392, le nombre de ces parties a été pris égal à 12. *m* étant l'un quelconque des points de division de la base, l'arête qui a son pied en *m* rencontre l'hélice en un point dont la hauteur au-dessus du plan *acbd* est au pas *a′a″* de l'hélice comme l'arc *acm* est à la circonférence *acbd* (671); ici l'arc *acm* étant les $\frac{5}{12}$ de la circonférence, la hauteur du point considéré est les $\frac{5}{12}$ de *aa′*. On obtiendra donc la projection *m′* de ce point en menant par le

Fig. 392.

point n, cinquième division de $a'a''$, une parallèle à xy jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire à xy menée par m. En opérant de même pour tous les points de division de la base, on obtiendra une série de points tels que m', qu'il suffira de joindre par un trait continu pour avoir la projection de l'hélice.

Pour avoir la projection de la tangente au point considéré, on prendra, sur la tangente mt au cercle de base, une longueur mt égale à l'arc acm, c'est-à-dire ici aux $\frac{5}{12}$ de la circonférence $acbd$; t sera la trace de la tangente sur le plan de la base (672). Ce point se projette au point t' que l'on obtient en abaissant la perpendiculaire tt' sur xy. Par suite, la droite $t'm'$ est la projection de la tangente.

On reconnaît facilement d'après cela que la courbe obtenue touche l'arête $a'a''$ en a' et a'', l'arête $b'b''$ en son milieu, et qu'elle est symétrique par rapport à la parallèle à xy menée par le milieu de $b'b''$. Cette courbe est connue sous le nom de *sinusoïde*.

QUESTIONS PROPOSÉES

SUR LE COMPLÉMENT.

1. Deux systèmes homothétiques à un troisième sont homothétiques entre eux, et les trois centres d'homothétie correspondants sont sur une même droite appelée *axe d'homothétie*. — Application au cas de trois circonférences ou de trois sphères.

2. Partager un quadrilatère quelconque en deux parties qui soient dans le rapport de deux droites données, par une parallèle ou une perpendiculaire à l'un de ses côtés.

3. Inscrire dans un carré un rectangle d'aire donnée.

4. Trouver sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle un point tel, que le carré construit sur la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'un des côtés de l'angle droit, soit équivalent au rectangle qui a pour dimensions les deux segments correspondants de l'hypoténuse.

5. Construire un triangle isocèle équivalent à un triangle donné.

6. Inscrire dans un cercle donné un triangle isocèle dont la somme de la base et de la hauteur soit égale à une droite donnée.

7. La droite AB étant divisée au point C en moyenne et extrême raison, démontrer que le rapport des segments AC et CB est incommensurable.

8. On partage une droite donnée en moyenne et extrême raison; puis le plus grand segment trouvé en moyenne et extrême raison, et ainsi de suite indéfiniment. Vers quelle limite tend la somme des plus grands segments ainsi obtenus?

9. AB est divisée au point C en moyenne et extrême raison; sur le plus grand segment CA prolongé, on prend AD = CA, et sur CA on prend AE = BC; démontrer que les droites BD et BE sont aussi divisées en moyenne et extrême raison aux points A et C.

10. Démontrer que la différence entre un arc moindre qu'une demi-circonférence et sa corde, est plus petite que le cube de l'arc divisé par seize fois le carré du rayon.

11. La somme des angles formés par les arêtes d'un angle trièdre avec les faces opposées, est comprise entre la somme des faces et la moitié de cette somme.

12. Si, par un point pris dans l'intérieur d'un angle polyèdre, on abaisse des perpendiculaires sur toutes ses faces, le nouvel angle polyèdre ainsi formé est *supplémentaire* du premier. (*Voir* les nos 537, 538.)

13. Dans tout angle polyèdre convexe de n faces, la somme des angles dièdres est comprise entre $2n$ et $2n - 4$ angles droits.

14. Démontrer que le volume d'un tronc de parallélipipède quelconque a pour mesure le produit de sa section droite par la moyenne arithmétique des quatre arêtes latérales.

15. On donne l'arête A d'un prisme triangulaire quelconque; sur l'une des arêtes, on prend à partir de la base une longueur x; sur la seconde arête, on prend de même une longueur a, et sur la troisième une longueur b. Par les trois points ainsi déterminés, on fait passer un plan qui divise le prisme en deux parties; pour quelle valeur de x ces parties seront-elles équivalentes?

16. Dans une sphère de rayon donné, mener un plan sécant AIB tel, que le rapport du segment à une base qu'il détermine, au secteur sphérique ayant pour base la même calotte sphérique, soit égal à m; discussion.

17. Étant donné sur une sphère de rayon R un cercle de rayon r, mener un second cercle parallèle au premier tel, que le rapport du segment compris entre ces deux cercles au cône qui a pour base le second cercle, et qui a pour sommet le centre du premier, soit égal à m; discussion.

18. D'un point B extérieur à une circonférence O, on lui mène deux tangentes BA, BC, et l'on projette le point de contact C sur le rayon OA

en D; démontrer que, si l'on fait tourner la figure autour de l'axe AOD, le volume engendré par le triangle mixtiligne ABC est équivalent au cône engendré par le triangle rectangle BAD, et le segment sphérique engendré par le triangle mixtiligne DAC équivalent au volume engendré par le triangle BCD.

19. Connaissant les latitudes et les longitudes de deux lieux de la surface terrestre supposée parfaitement sphérique, trouver, à l'aide d'opérations exécutées sur un globe, la distance de ces deux lieux en degrés.

20. Construire un triangle sphérique, connaissant :

1° Un angle, un côté adjacent et la somme ou la différence des deux autres côtés;

2° Un côté, un angle adjacent et la somme ou la différence des deux autres angles;

3° Deux côtés et la hauteur correspondante à l'un d'eux:

4° Un angle, un côté et la hauteur qui lui correspond;

5° Son aire, un angle et l'un des côtés adjacents.

21. Dans un losange sphérique, les diagonales se coupent à angle droit.

22. Transformer un polygone sphérique en un triangle sphérique équivalent.

23. Deux triangles sphériques sont équivalents lorsque leurs triangles polaires ont même périmètre, et réciproquement.

24. Le lieu géométrique des sommets C des triangles sphériques de même base AB et de même aire, est un arc de petit cercle passant par les points E et D, diamétralement opposés aux extrémités A et B de la base.

25. Quelle est la plus courte et la plus grande distance du centre de l'ellipse à un point de la courbe?

26. Quel est le lieu du centre d'une ellipse qui glisse entre deux axes rectangulaires?

27. Quel est le lieu des points également distants de deux circonférences intérieures ou extérieures l'une à l'autre?

28. Quel est le lieu des centres des cercles tangents à deux cercles donnés? — On examinera les différents cas possibles.

29. Sur les deux tangentes PM, PM', à une ellipse ou à une hyperbole dont les foyers sont F et F', on prend des longueurs PQ, PQ', respectivement égales à PF et à PF'; démontrer que la droite QQ' est égale au grand axe de l'ellipse ou à l'axe transverse de l'hyperbole.

30. Le grand axe de l'ellipse ou l'axe transverse de l'hyperbole et une tangente quelconque interceptent, sur les deux tangentes menées aux extrémités de l'axe de la courbe, des longueurs dont le produit est constant.

31. Des cercles touchent une droite AB en un point fixe C, et des points

fixes A et B on mène des tangentes à ces cercles; trouver le lieu des points d'intersection de ces tangentes.— Le point C peut être entre A et B ou sur AB prolongée.

32. Soient les deux tangentes menées à l'ellipse ou à l'hyperbole par un point extérieur et une troisième tangente quelconque; démontrer que la longueur interceptée sur cette troisième tangente par les deux premières, est vue de chaque foyer sous un angle constant.

33. Quels sont les lieux géométriques : 1° des sommets; 2° des points de rencontre des côtés non parallèles; 3° des points d'intersection des diagonales, des trapèzes construits sur une base fixe, et dans lesquels la longueur de l'autre base est donnée ainsi que la somme ou la différence des côtés non parallèles?

34. Construire une ellipse ou une hyperbole, connaissant : 1° ses foyers et un point; 2° ses foyers et une tangente; 3° un foyer, deux points et une tangente; 4° un foyer, un sommet et une tangente; 5° un foyer, deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles; 6° un foyer et trois tangentes; 7° le centre, deux tangentes et la longueur du grand axe ou de l'axe transverse.

35. Trouver les points de rencontre d'une droite avec une ellipse ou une hyperbole dont on connaît seulement les foyers et la longueur du grand axe ou de l'axe transverse. — Même problème pour la parabole, connaissant son foyer et sa directrice.

36. Si deux cordes de la parabole se coupent, les produits de leurs segments sont dans le rapport des rayons vecteurs des extrémités des diamètres qui leur sont conjugués.

37. La tangente en un point de la parabole rencontre la directrice et la corde menée par le foyer perpendiculairement à l'axe, en des points équidistants du foyer.

38. Si d'un point pris sur une tangente à la parabole on mène une autre tangente à la courbe, l'angle compris entre cette tangente et la droite menée du même point au foyer est constant.

39. Si le diamètre de la parabole mené par le point M rencontre la directrice en K et la corde menée par le foyer parallèlement à la tangente MT en H, on a

$$MK = MH.$$

40. Quel est le lieu du point d'intersection du diamètre mené en un point de la parabole, avec la corde tracée par le foyer parallèlement à la tangente au même point?

41. AB et AC étant deux droites rectangulaires, on mène la droite quelconque AR et la parallèle fixe CR à AB; puis on prend sur AR un

point M tel, que son ordonnée MQ par rapport à AB soit égale à CR ; quel est le lieu du point M ?

42. On considère dans un cercle un diamètre fixe AOB et un rayon quelconque OC ; D étant le milieu de la corde CE menée parallèlement au diamètre fixe, on demande le lieu du point d'intersection des droites OC et AD.

43. Le cercle déterminé par les points d'intersection de trois tangentes à la parabole, passe par le foyer.

44. Du sommet S, on mène deux droites rectangulaires qui viennent rencontrer la parabole aux points M et M' ; le paramètre $2p$ est la moyenne proportionnelle des abscisses des points M et M'.

45. Quel est le lieu du centre du cercle inscrit dans le secteur circulaire AOB, dont l'un des rayons OA est fixe et dont l'autre OB est mobile ?

46. Sur une corde de la parabole comme diamètre, on décrit un cercle qui coupe la parabole en deux autres points ; si l'on joint ces points, les deux cordes considérées interceptent sur l'axe de la courbe une longueur égale au paramètre $2p$.

47. Si l'on tire par le sommet de la parabole des cordes à angle droit l'une sur l'autre et qu'on construise sur ces cordes un rectangle, quel est le lieu de son quatrième sommet ?

48. Quel est le lieu des points également distants d'une droite et d'une circonférence données ?

49. Quel est le lieu des points dont la somme ou la différence des distances à un point fixe et à une droite fixe est constante ?

50. Construire une parabole, connaissant : 1° le foyer ou la directrice et deux points ; 2° le foyer ou la directrice, un point et une tangente ; 3° le foyer ou la directrice, une tangente et son point de contact ; 4° le foyer ou la directrice et deux tangentes ; 5° trois tangentes, parmi lesquelles la tangente au sommet ; 6° quatre tangentes.

51. Si une parabole roule sur une autre parabole égale, les sommets étant d'abord confondus, le foyer de chaque courbe trace la directrice de l'autre.

52. Si les tangentes PM, PM', à la parabole sont coupées en Q et en Q' par une troisième tangente, on a

$$\frac{PQ}{QM} = \frac{Q'M'}{PQ'}.$$

53. Deux paraboles égales qui ont même foyer et leurs axes dirigés en sens contraires, se coupent à angle droit.

54. Des extrémités d'une corde focale de la parabole on abaisse des

perpendiculaires sur une droite quelconque de son plan; la somme des rapports de chaque ordonnée au rayon vecteur correspondant est constante.

55. Les carrés des perpendiculaires abaissées du foyer de la parabole sur deux tangentes, sont proportionnels aux rayons vecteurs des points de contact.

56. Si par le point de contact d'une tangente à la parabole on tire une corde, puis qu'on trace une autre droite parallèle à l'axe, la portion de cette droite comprise entre la tangente et la corde sera divisée par son point de rencontre avec la courbe dans le même rapport que cette droite elle-même divise la corde.

57. Par deux points d'une surface cylindrique, on peut faire passer une infinité d'hélices.

58. Deux hélices tracées sur un cylindre de révolution se coûpent orthogonalement; on donne le rayon du cylindre et le pas de l'une des hélices, trouver le pas de l'autre.

59. Des extrémités A et A′ d'un diamètre de la section droite d'un cylindre de révolution, partent deux hélices orthogonales dont le premier point d'intersection est en M; trouver, en fonction du pas h de la première hélice et du rayon R du cylindre, l'aire mixtiligne AMA′. — Quel doit être le pas h pour que l'aire AMA′ soit maximum? Le rayon du cylindre étant un décimètre, évaluer à un millimètre carré près cette aire maximum.



NOTES.

NOTE I.

SUR LE RAPPORT DE DEUX GRANDEURS INCOMMENSURABLES ENTRE ELLES.

1. Dans le n° **117** nous avons expliqué comment on mesure une grandeur commensurable avec l'unité; considérons maintenant une grandeur incommensurable avec l'unité choisie.

Concevons l'unité décomposée en un nombre quelconque n de parties égales entre elles et moindres que la grandeur à mesurer G. En prenant 1, 2, 3, 4,..., de ces parties, on formera une série de grandeurs

$$(1) \qquad A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad A_4, \ldots, \quad A_k, \quad A_{k+1}, \ldots,$$

croissant au delà de toute limite et mesurées respectivement par les nombres

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n}, \quad \frac{3}{n}, \quad \frac{4}{n}, \ldots, \quad \frac{k}{n}, \quad \frac{k+1}{n}, \ldots.$$

On trouvera donc, en allant assez loin dans la série (1), deux grandeurs consécutives A_k et A_{k+1} qui comprendront la proposée G. En substituant à G soit A_k, soit A_{k+1}, on commettra une erreur moindre que la différence $A_{k+1} - A_k$, c'est-à-dire aussi faible qu'on voudra, puisque cette différence, qui est la $n^{ième}$ partie de l'unité, peut être diminuée à volonté en prenant n assez grand.

La grandeur G étant la limite commune des grandeurs commensurables A_k et A_{k+1}, le nombre qui la mesure est, *par définition,* la limite commune des nombres $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$ qui mesurent A_k et A_{k+1}; et en prenant soit $\frac{k}{n}$, soit $\frac{k+1}{n}$ pour le nombre qui mesure G, on aura de ce nombre une valeur, par défaut ou par excès, approchée à moins de $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire une valeur qu'on pourra, en faisant croître n, rendre aussi approchée qu'on voudra.

2. Un nombre est dit *commensurable* ou *incommensurable* suivant que la grandeur dont il exprime la mesure est commensurable ou incommensurable avec l'unité adoptée. Les nombres commensurables sont les nombres entiers et les fractions.

Le résultat d'opérations à effectuer sur des nombres incommensurables peut être obtenu avec telle approximation qu'on veut, en substituant à ces nombres des valeurs commensurables suffisamment approchées; en d'autres termes : *le résultat d'opérations à exécuter sur des nombres in-*

commensurables est la limite des résultats obtenus en substituant à chacun d'eux des valeurs commensurables de plus en plus approchées.

3. Pour compléter la démonstration du n° 119, il faut considérer le cas où le rapport de A à B, c'est-à-dire (118) le nombre par lequel il faut multiplier B pour avoir A, est incommensurable. Désignons-le par r, et appelons m le nombre qui mesure A, B étant pris pour unité. Soient d'ailleurs $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$ deux valeurs approchées à moins de $\frac{1}{n}$, l'une par défaut, l'autre par excès, du rapport r. On aura alors (118)

$$B\cdot\frac{k}{n} < A < B\cdot\frac{k+1}{n}.$$

Le nombre m qui mesure A sera donc compris entre les nombres $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$ qui mesurent les deux grandeurs $B\cdot\frac{k}{n}$, $B\cdot\frac{k+1}{n}$, B étant l'unité. Donc les nombres m et r, étant compris l'un et l'autre entre deux nombres $\frac{k}{n}$ et $\frac{k}{n}+\frac{1}{n}$, qui diffèrent aussi peu qu'on veut pour n assez grand, ne sauraient avoir une différence assignable.

4. Pour compléter la démonstration du n° 125, il faut considérer le cas où le rapport $\frac{a}{a'}$ est incommensurable. Soient $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$ deux valeurs approchées de ce rapport à $\frac{1}{n}$ près, l'une par défaut, l'autre par excès. On aura

$$\frac{k}{n}a' < a < \frac{k+1}{n}a',$$

d'où, en désignant par α la $n^{ième}$ partie de a',

$$k\alpha < a < (k+1)\alpha \quad \text{et} \quad a' = n\alpha.$$

Mais si β est la valeur de B qui correspond à la valeur α de A, aux valeurs $k\alpha$, $(k+1)\alpha$, $n\alpha$, de A correspondront respectivement les valeurs $k\beta$, $(k+1)\beta$, $n\beta$, de B. On aura donc, puisque, d'après l'énoncé, à une plus grande valeur de A correspond nécessairement une plus grande valeur de B,

$$k\beta < b < (k+1)\beta \quad \text{et} \quad b' = n\beta,$$

c'est-à-dire

$$\frac{k}{n}b' < b < \frac{k+1}{n}b' \quad \text{ou} \quad \frac{k}{n} < \frac{b}{b'} < \frac{k+1}{n}.$$

Par suite, les deux rapports $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, étant compris entre deux nombres $\frac{k}{n}$ et $\frac{k}{n}+\frac{1}{n}$ qui, pour n assez grand, diffèrent aussi peu qu'on veut, ne sauraient avoir aucune différence assignable.

NOTE II.

NOTIONS SUR LE LEVÉ DES PLANS ET L'ARPENTAGE.

PROGRAMME OFFICIEL : *Levé au mètre. — Levé au graphomètre. — Levé à l'équerre d'arpenteur. — Levé à la planchette. — Aire approchée d'une figure plane limitée par une courbe quelconque. — Volume approché d'un solide limité par une surface quelconque.*

Objet du levé des plans.

1. En un lieu quelconque, on appelle *verticale* la direction du fil à plomb, et *plan horizontal* tout plan perpendiculaire à la verticale.

La terre a sensiblement la forme d'une sphère dont le centre est le point de concours de toutes les verticales; mais comme il faut se déplacer de 2 kilomètres sur la surface de notre globe pour que l'angle des deux verticales atteigne une minute, on doit, dans les opérations ordinaires de la topographie, supposer parallèles toutes les verticales, et par suite tous les plans horizontaux, aux divers points du terrain que l'on se propose de représenter.

On nomme *plan* d'un terrain la projection de ce terrain sur un plan horizontal, ou plutôt une figure semblable à cette projection horizontale. *Lever le plan* d'un terrain, c'est exécuter toutes les opérations nécessaires pour tracer cette figure sur le papier.

Description des instruments employés.

2. *Jalon.* — Sur le terrain, on indique la direction d'une ligne droite par des *jalons,* bâtons ferrés à la partie inférieure, que l'on plante dans le sol, et qui portent à leur extrémité supérieure une fente dans laquelle on insère un morceau de papier blanc destiné à rendre le jalon visible de loin. Théoriquement, il suffit de placer un jalon à chacune des extrémités de la droite; mais si ces points extrêmes sont trop éloignés, on place sur la droite un ou plusieurs jalons intermédiaires. Pour que trois jalons soient exactement en ligne droite, il faut que le second jalon cache le troisième à l'œil d'un observateur placé près du premier.

3. *Chaîne et fiches.* — Pour mesurer les distances, on se sert d'une *chaîne,* de 10 mètres de long, composée de cinquante *chaînons* B, C,... ou tiges de fer assemblées par des anneaux de même métal (*fig.* 393); l'intervalle compris entre les centres de deux anneaux consécutifs est de 2 décimètres; les anneaux Δ placés de mètre en mètre sont en cuivre, et

celui qui occupe le milieu de la chaîne est muni d'un petit appendice E : ces distinctions entre les anneaux facilitent la lecture des fractions de décamètre. La chaîne est munie à chacune de ses extrémités d'une poignée A dont la longueur est prise sur celle du chaînon adjacent B qui est plus court que les autres.

Concurremment avec la chaîne on emploie dix *fiches* (*fig.* 394), petites tiges en fil de fer terminées d'un côté par un anneau, de l'autre par une pointe.

Fig. 393.

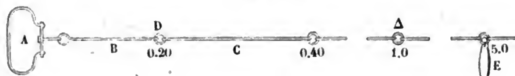


Fig. 394.



Pour mesurer la distance qui sépare deux jalons P et Q, le *chaîneur d'avant* part du point P et se dirige vers le point Q, en tenant d'une main une poignée de la chaîne et de l'autre les dix fiches; puis, tandis que le *chaîneur d'arrière* applique l'autre poignée contre le jalon P, le chaîneur d'avant tend la chaîne sur le sol, et, après avoir obéi aux signes que lui fait le chaîneur d'arrière pour l'amener dans l'alignement PQ, il plante dans le sol une fiche qui touche *intérieurement* le bord de la poignée. Les deux opérateurs se relèvent et s'avancent jusqu'à ce que le chaîneur d'arrière arrive près de la fiche, contre laquelle il applique le bord *extérieur* de la poignée, et l'opération recommence à partir de cette fiche comme à partir du jalon P; seulement, le chaîneur d'arrière ramasse la fiche au moment où il quitte l'emplacement de cette fiche. Lorsque le chaîneur d'avant plante sa dernière fiche, la distance parcourue est de 100 mètres. On porte alors encore une fois la chaîne au delà; le chaîneur d'arrière ramasse la dixième fiche en plaçant avec soin le bord de la poignée au point même où se trouvait la fiche; le chaîneur d'avant, abandonnant la chaîne sur le sol, vient prendre les dix fiches, puis, retournant à son poste, il tend la chaîne, plante une fiche, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il reste moins de 1 décamètre pour atteindre le jalon Q. Pour évaluer la fraction de décamètre, le chaîneur d'avant place sa poignée contre le jalon Q, et le chaîneur d'arrière, abandonnant sa poignée, tend la chaîne entre le jalon Q et la dernière fiche plantée; cela fait, il compte, à partir du jalon Q, les anneaux de cuivre, puis les anneaux de fer compris entre le dernier anneau de cuivre et la fiche, et il évalue à l'œil la fraction du dernier chaînon employé; il ramasse alors la dernière fiche et compte les fiches qui se trouvent à ce moment dans sa main. Si l'on a échangé trois fois le paquet des dix fiches, si le chaîneur d'arrière

tient à la fin sept fiches, et si entre la dernière fiche et le dernier jalon il a compté six anneaux de cuivre, deux chaînons et un quart de chaînon, la distance mesurée est

$$3.100 + 7.10 + 6 + \left(2 + \frac{1}{4}\right).0,20 = 376^{m},45.$$

L'erreur commise par deux chaîneurs exercés ne doit pas dépasser 1 décimètre par hectomètre.

Nous avons supposé le terrain horizontal : si l'on descendait une pente sensible, le chaîneur d'arrière tiendrait toujours sa poignée près du sol, mais le chaîneur d'avant élèverait la sienne de manière à tendre la chaîne à peu près horizontalement; puis, à l'aide d'un fil à plomb, il déterminerait le point du sol où se projette l'extrémité de sa poignée et où le chaîneur d'arrière doit placer la sienne dans l'opération suivante. De cette façon on mesure, non la distance des deux points, mais sa projection horizontale, qui est seule nécessaire, d'après ce que nous avons dit, pour lever le *plan*.

Fig. 395.

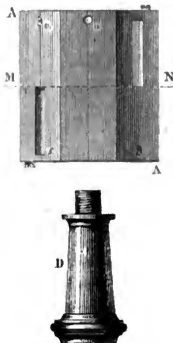


Fig. 396.

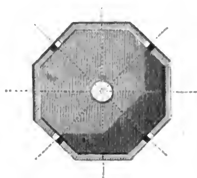


Fig. 397.



4. *Équerre d'arpenteur*. — Cet instrument se compose d'une petite boîte en cuivre AA (*fig.* 395, 396, 397) ayant la forme d'un prisme régulier à

huit pans; dans cette boîte sont pratiquées quatre fentes suivant des génératrices diamétralement opposées deux à deux, de telle sorte que le plan de deux fentes opposées soit perpendiculaire au plan des deux autres. Dans les équerres soignées, chaque fente est remplacée par une *pinnule;* on appelle ainsi une double ouverture composée d'une fente étroite ou *œilleton* et d'une fenêtre plus large divisée en deux par un fil tendu dans le prolongement de la fente; deux pinnules opposées sont telles, que l'œilleton de chacune d'elles réponde à la fenêtre de l'autre. Cette boîte prismatique est vissée inférieurement sur une *douille* D ou tige creuse en cuivre, dans laquelle on engage l'extrémité supérieure du bâton ferré B qui porte l'instrument et qu'on plante verticalement dans le sol.

L'équerre sert à mener sur le terrain une perpendiculaire, par un point donné C, sur une droite donnée AB.

Si le point C est sur la droite AB (*fig.* 398), on place l'instrument en ce point de manière que l'un des plans de visée coïncide avec celui des jalons A et B; il faut pour cela qu'en plaçant l'œil successivement à l'un et à l'autre des deux œilletons situés dans ce plan de visée, on voie le fil de la fenêtre opposée couvrir d'un côté le jalon A, de l'autre le jalon B. Cela étant, l'observateur se place à l'un des deux œilletons non encore employés, et il envoie, sur l'alignement déterminé par cet œilleton et le fil opposé, un aide placer un jalon qui, avec la position actuelle de l'équerre, détermine la perpendiculaire demandée.

Fig. 398.

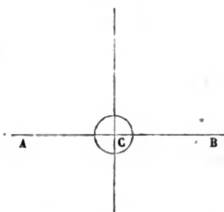
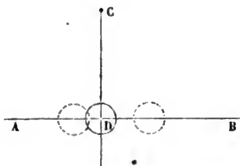


Fig. 399.

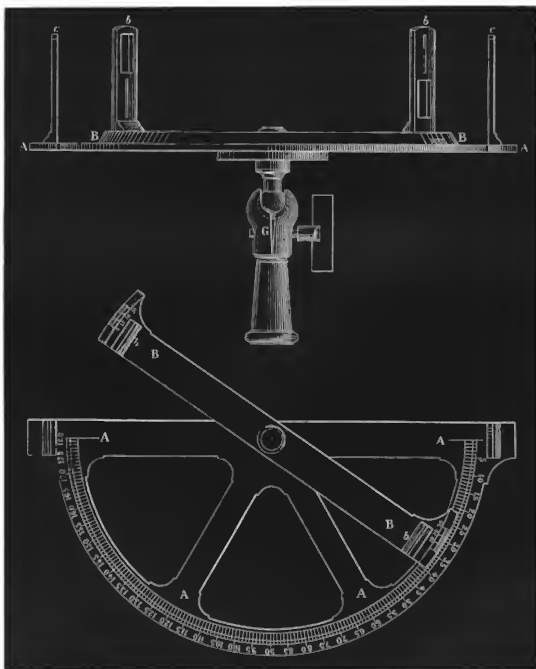


Si le point C est extérieur à la droite AB (*fig.* 399), on détermine approximativement et à vue le pied de la perpendiculaire, et l'on dispose l'équerre en ce point de façon que l'un des plans de visée coïncide avec le plan des jalons A et B; puis, si par l'œilleton de l'autre plan de visée on aperçoit le fil opposé couvrir le jalon C, c'est qu'on a exactement le pied de la perpendiculaire. Sinon, si le jalon C apparaît, par exemple, à gauche du fil, c'est qu'on est trop à droite; on avance alors l'équerre vers la gauche sur l'alignement AB; si le jalon C apparaît alors à droite, c'est qu'on a trop avancé l'équerre; on la recule en lui donnant une position intermédiaire, et ainsi de suite jusqu'à ce que le jalon C soit

couvert par le fil. Ce tâtonnement n'est pas long pour un observateur un peu exercé.

5. *Graphomètre.* — Le *graphomètre* sert à mesurer les angles sur le terrain ; il se compose (*fig.* 400) d'un demi-cercle en cuivre A dont le bord ou *limbe* est divisé en degrés et demi-degrés ; autour du centre *o* pivote une règle ou *alidade* B portant à ses deux extrémités et perpendiculairement

Fig. 400.



à son plan deux pinnules *b* qui déterminent un plan de visée auquel on peut donner la direction d'un diamètre quelconque du limbe. Le diamètre qui termine le demi-cercle porte aussi à ses extrémités deux pinnules *c* fixes qui déterminent un plan de visée dirigé suivant la ligne 0° - 180°.

Tout le système repose sur une courte tige en cuivre terminée par une sphère; cette sphère est prise entre deux mâchoires hémisphériques G que l'on peut serrer plus ou moins à l'aide d'une vis; ce support qui permet d'orienter à volonté le plan du limbe est connu sous le nom de *genou à coquilles;* il fait corps avec une douille qu'on pose sur un pied à trois branches.

Pour mesurer un angle BAC, on place le centre de l'instrument au sommet A, et l'on amène le plan du limbe à contenir les points B et C, ce que l'on vérifie très-aisément en plaçant son œil près de ce plan; puis on dirige successivement l'alidade fixe vers le point B, l'alidade mobile vers le point C, et on lit sur la graduation la valeur de l'arc compris entre les deux lignes de visée. La manière de faire cette lecture exige quelques explications. L'alidade mobile porte à ses extrémités un *vernier*, c'est-à-dire une petite graduation contenant quinze divisions équivalentes à quatorze de celles qui, sur le limbe, indiquent des demi-degrés; chaque division du vernier vaut donc $\left(1-\frac{1}{15}\right)$ de demi-degré, c'est-à-dire un demi-degré moins 2 minutes. Cela étant, supposons que le zéro du vernier, qui correspond à la ligne de visée de l'alidade mobile, tombe entre $37°\frac{1}{2}$ et $38°$, et que ce soit la cinquième division du vernier qui coïncide exactement avec une division du limbe; le n° 4 du vernier dépassera alors de 2 minutes la division précédente du limbe, le n° 3 dépassera de 4 minutes la division anté-précédente du limbe, et ainsi de suite, de sorte que le zéro du vernier dépassera de 10 minutes la division du limbe qui marque $37°\frac{1}{2}$; l'angle mesuré vaudra donc $37°30'+10'$ ou $37°40'$ à 2 minutes près.

Dans le levé d'un terrain, ce n'est pas l'angle BAC qu'il faut mesurer, mais sa projection horizontale, c'est-à-dire l'angle rectiligne du dièdre formé par les plans verticaux qui passent par AB et AC. A cet effet, le centre de l'instrument étant en A, au lieu d'amener le limbe à contenir les points B et C, on rend ce limbe horizontal à l'aide d'un niveau à bulle d'air; pour que le demi-cercle soit horizontal, il suffit qu'en plaçant le niveau sur ce cercle, dans deux positions différentes, la bulle d'air vienne chaque fois au milieu du niveau, car le plan, ayant alors deux droites horizontales, est horizontal.

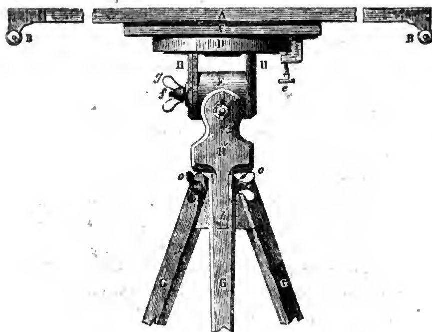
Si les différences de niveau du sommet A et des points B et C étaient alors trop fortes pour qu'on cessât d'apercevoir à travers les pinnules les jalons B et C, il faudrait employer un graphomètre dans lequel les alidades à pinnules seraient remplacées par des alidades à lunettes plongeantes.

6. *Planchette.* — Cet instrument consiste dans une petite table carrée, en bois, A, sur laquelle on colle la feuille de papier qui doit recevoir le *plan*, et qui est reliée à un pied à trois branches par un genou *à la Cugnot.* Ce genou (*fig.* 401) est composé de deux cylindres dont les axes f et f' sont à angle droit, et autour desquels on peut faire tourner succes-

sivement la planchette; g et g' sont deux écrous qui, suivant qu'on les serre ou qu'on les desserre, arrêtent ou laissent s'effectuer ces deux mouvements, qui permettent, à l'aide d'un niveau à bulle d'air, de rendre la planchette horizontale. La planchette A ne repose pas immédiatement sur le genou; elle fait corps avec une seconde table C, qui peut tourner horizontalement autour de son centre en glissant sur un plateau circulaire D qui est fixé invariablement au genou à l'aide de deux collets H et H. Une vis de pression c permet, suivant qu'on la desserre ou qu'on la serre, de faire mouvoir la planchette horizontalement ou de la relier d'une manière inébranlable au plateau D.

Sur la planchette, on pose une alidade à lunette ou à pinnules qu'on fait tourner autour de tel point qu'on veut à l'aide d'une épingle plantée en ce point et contre laquelle on maintient un de ses bords.

Fig. 401.



Pour tracer sur la feuille de dessin l'angle des deux plans verticaux déterminé par deux jalons B et C et un point A du terrain, on porte la planchette au-dessus du sommet A; on la rend horizontale, puis, en desserrant la vis e, on la fait tourner jusqu'à ce que le point du papier que l'on veut prendre pour sommet de l'angle se projette au point A du sol. On fixe une épingle en ce point du papier, et en faisant tourner le bord de l'alidade autour de cette épingle, on vise successivement les jalons B et C, en ayant soin, après chaque visée, de tracer au crayon un trait le long du bord de l'alidade qui s'appuie sur l'épingle : ces deux traits figurent l'angle demandé. Il n'est pas indispensable que l'épingle se projette *très-exactement* sur le point A du sol : une erreur de 3 ou 4 centimètres n'influe pas sensiblement sur les résultats, vu l'échelle à laquelle on opère ordinairement.

Principes des méthodes suivies dans le levé des plans.

7. Toutes les manières d'opérer dans le levé des plans se rattachent en définitive à deux méthodes principales dites, l'une *méthode par intersections*, l'autre *méthode de cheminement*.

Soit, par exemple, à lever le plan d'un polygone ABCDE... (*fig.* 403).

Pour opérer par *intersections*, on choisit sur le terrain deux points M et N d'où l'on aperçoive tous les sommets A, B, C, D, E,.... En se plaçant en M, on mesure les angles que la droite MN fait avec les rayons visuels menés de M aux divers points A, B, C, D, E,...; puis on mesure MN, et arrivé en N, on mesure les angles que la droite NM fait avec les rayons visuels menés de N aux sommets A, B, C, D, E,.... Un sommet quelconque du polygone ABCDE..., B par exemple, est alors déterminé de position par rapport à la *base* MN, puisqu'il est l'intersection de deux droites MB, NB, qui font avec MN des angles connus. La base MN doit avoir une étendue assez grande; elle peut être un côté ou une diagonale du polygone, ou une droite située dans le voisinage des points à lever.

Pour opérer par *cheminement*, on part de l'un des sommets A et l'on mesure successivement les côtés et les angles du polygone; le polygone sera ainsi déterminé, mais il importe à la fin de l'opération, lorsqu'on est revenu au point de départ, de vérifier si la somme des angles mesurés fait autant de fois deux angles droits que le polygone a de côtés moins deux. Si cette vérification laissait une erreur notable, il faudrait recommencer en tout ou en partie.

La méthode des intersections est très-expéditive : elle est avantageuse dans le cas des terrains découverts, pour la détermination des points inaccessibles, etc.; il faut avoir soin toutefois que les angles sous lesquels se coupent les deux droites qui déterminent chaque point ne soient pas trop petits.

La méthode de cheminement permet de suivre les sentiers, les clôtures, les cours d'eau; elle est seule applicable aux terrains qui offrent des obstacles à la vue.

On emploie d'ailleurs souvent simultanément les deux méthodes dans un même levé, suivant les parties du terrain que l'on veut représenter.

8. Ces principes posés, voici la manière de mettre en œuvre les deux méthodes suivant les instruments qu'on emploie.

Levé au mètre ou à la chaîne. — On peut opérer avec la chaîne seule, et tout revient à expliquer comment on peut alors mesurer un angle. A partir du sommet, on mesure sur les côtés deux longueurs égales ou inégales; puis, la distance qui sépare les extrémités des deux longueurs ainsi mesurées sur les côtés. L'angle inconnu appartient ainsi à un triangle dont on connaît les trois côtés.

On conçoit que ce procédé fort long ne doit être appliqué qu'aux levés de peu d'étendue; il est utile surtout dans le levé des bâtiments, où l'on opère avec un décamètre en toile ou un ruban métallique. Il sert aussi à rattacher certains détails aux lignes principales déjà levées par une autre méthode.

Levé à l'équerre d'arpenteur. — On détermine à l'équerre (*fig.* 402), sur une base OX indiquée par deux jalons O et X, les pieds A, B, C, D, E, des perpendiculaires abaissées des sommets *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, du polygone à lever; puis on mesure à l'aide de la chaîne les longueurs OE, EA, AD, DB, BC, et les perpendiculaires A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*. Il est clair que cette méthode n'est au fond que la *méthode par intersections;* car les perpendiculaires sont les distances au point O des projections A', B', C', D', E', des sommets, sur un second axe OY perpendiculaire à OX, et chaque sommet du polygone se trouve à l'intersection de deux droites, l'une perpendiculaire à OX, l'autre perpendiculaire à OY.

Ce procédé est utile pour rattacher certains détails à une ligne principale déjà connue OX; il sert dans le tracé des routes, dans le relèvement des rues, des boulevards, etc.

Levé au graphomètre. — Le levé à la chaîne et au graphomètre est le plus précis; il n'exige d'ailleurs aucune explication nouvelle: on peut opérer par cheminement ou par intersections.

Levé à la planchette. — Ce procédé est le plus expéditif, lorsqu'on opère par *intersections;* mais il est moins exact que le précédent.

Pour lever par *intersections,* à l'aide de la planchette, un polygone ABCDE... (*fig.* 403), on mesure la base MN et on trace sur la planchette

Fig. 402.

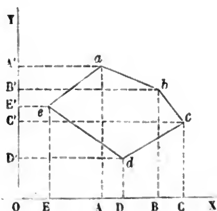
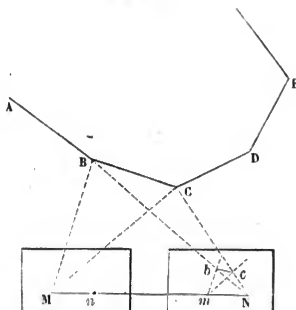


Fig. 403.



une droite *mn*, qui représente la base MN à l'échelle adoptée. Cela fait, on met la planchette en station au point M, de manière que *m* se projette en M, et que la droite *mn* soit dirigée suivant MN; puis, avec l'alidade, on

trace les lignes *mb*, *mc*,..., qui répondent aux rayons visuels MB, MC,...; on porte ensuite la planchette en N, de manière que *n* se projette sur N et que *nm* soit dirigée suivant NM, et à l'aide de l'alidade on trace les droites *nb*, *nc*,..., qui répondent aux rayons visuels NB, NC,.... En réunissant par des lignes droites les points *b*, *c*,..., obtenus, on a sur la feuille de papier le plan du polygone à l'échelle voulue.

Nous n'avons rien à ajouter sur la marche à suivre pour opérer par cheminement. D'ailleurs la méthode de cheminement ne doit être appliquée à la planchette que dans les cas forcés, à cause des nombreuses mises en station qui exigent beaucoup de temps et entraînent des accumulations d'erreur.

On peut, avec la planchette, suivre dans certains cas un troisième procédé dit *par rayonnement* et qui consiste à mettre l'instrument en station vers le centre du polygone et à diriger l'alidade vers tous les sommets. Après avoir tracé au crayon les lignes correspondantes, on mesure sur le terrain les distances qui séparent la station des divers sommets du polygone, et en rapportant sur la feuille de dessin, à partir de l'épingle, ces longueurs à l'échelle adoptée, on obtient les divers sommets du polygone, qu'il ne reste plus qu'à joindre deux à deux par des droites.

Marche à suivre pour lever un terrain; levé du canevas et des détails.

9. Lorsqu'on a un terrain à lever, on doit commencer par choisir dans toute son étendue un certain nombre de points remarquables, convenablement espacés, et formant un polygone ou un assemblage de polygones contigus, auquel on donne le nom de *canevas*. On lève ce canevas, puis on rattache à ses divers côtés tous les détails qu'on fait figurer sur le plan. Cette séparation de l'opération en deux parties évite l'accumulation des erreurs.

Le levé du canevas doit être fait avec un très-grand soin; il convient de l'exécuter au graphomètre et à la chaîne, soit par cheminement, soit par intersections, soit par ces deux méthodes combinées; on peut aussi l'effectuer à la planchette, mais toujours un peu alors aux dépens de l'exactitude.

Quant aux détails, on peut les relever, soit au graphomètre, soit à l'équerre, soit au mètre, comme nous l'avons expliqué; mais le mieux et le plus court est d'employer, si l'on peut, la planchette, en opérant par intersections et en prenant pour base de chaque levé partiel un côté du canevas.

Lorsqu'on a terminé toutes les opérations sur le terrain, il ne reste plus qu'à dessiner, d'après tous ces documents, le *plan* du terrain sur une feuille de papier; cette opération n'exige aucune explication, et il nous suffit de renvoyer à tout ce que nous avons dit sur les constructions

graphiques dans la Géométrie plane. Nous ajouterons seulement un mot sur les échelles employées. Les échelles prescrites dans le service des Ponts et Chaussées sont

$$\frac{1}{1000}, \quad \frac{1}{2000}, \quad \frac{1}{2500}, \quad \frac{1}{5000}, \quad \frac{1}{10000}.$$

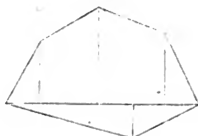
On emploie encore l'échelle $\frac{1}{200}$ pour les plans des portions de villes ou villages traversées par des routes, l'échelle $\frac{1}{100}$ pour les ouvrages d'art compliqués, et enfin les échelles $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$, pour certains détails relatifs au matériel des chemins de fer, à certains ouvrages en charpente, etc.

Arpentage.

10. L'*arpentage* a pour objet la mesure de l'aire d'un terrain; on suit pour cela la méthode indiquée pour le levé à l'équerre.

Si le terrain a la forme d'un polygone (*fig.* 404), après avoir placé des jalons aux sommets, on prend pour base la plus grande diagonale, sur la-

Fig. 404.



quelle on détermine à l'équerre les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets du polygone; puis on mesure successivement à la chaîne les divers fragments de la base et les diverses perpendiculaires. On a donc tous les éléments nécessaires pour calculer les aires des trapèzes rectangles et des quatre triangles extrêmes dans lesquels le terrain se trouve décomposé.

Si l'un des côtés du polygone est très-grand par rapport aux autres, on peut le prendre pour base.

Si le contour est curviligne (*fig.* 405), on inscrit dans la courbe un polygone en faisant le tour du terrain et plantant des jalons assez rapprochés pour que les parties extérieures à ce polygone n'aient pas une étendue trop considérable. On mesure le polygone comme nous venons de l'expliquer, puis, pour évaluer les segments tels que A*m*B, on divise la corde AB en un nombre de parties égales assez grand pour qu'en élevant des perpendiculaires sur la corde, les portions de courbe interceptées puissent être assimilées à des lignes droites. Connaissant la longueur d'une division de la corde et les diverses perpendiculaires, on calcule les

trapèzes et les deux triangles extrêmes qu'on a formés. Ce procédé, connu sous le nom de *méthode des trapèzes,* est presque toujours suffisamment exact; nous donnerons d'ailleurs dans l'article suivant une méthode plus précise pour évaluer les aires terminées par des courbes.

Fig. 405.

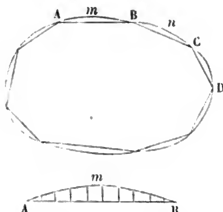
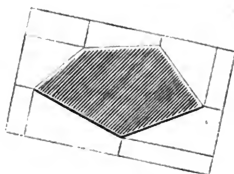


Fig. 406.



Enfin, si l'intérieur du terrain est inaccessible (*fig.* 406), on l'entoure d'un rectangle, et l'on retranche de l'aire de ce rectangle l'aire de la figure comprise entre le contour du terrain et les côtés de ce quadrilatère, après qu'on a évalué cette aire par décomposition en rectangles et trapèzes, à l'aide de perpendiculaires abaissées des sommets du polygone sur les côtés du rectangle extérieur.

Aire approchée d'une figure plane terminée par une courbe quelconque.

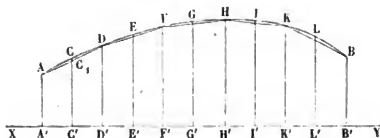
11. B et B′ désignant les bases d'un trapèze, B″ la parallèle équidistante de ces bases et h la demi-hauteur, on peut exprimer l'aire du trapèze par la formule

$$(1) \qquad \frac{h}{3}(B + b + 4B''),$$

qui se réduit en effet à la formule connue $h(B + B')$, lorsqu'on y remplace B″ par sa valeur $\frac{1}{2}(B + B')$.

Cela posé, soit à évaluer approximativement l'aire comprise entre un arc de courbe quelconque AB, une droite fixe XY et les perpendiculaires AA′, BB′, abaissées sur cette droite par les extrémités de l'arc AB (*fig.* 407).

Fig. 407.



Supposons d'abord que l'arc AB soit, dans toute son étendue, concave

vers la droite XY. Divisons la base A'B' en un nombre pair de parties égales, en dix par exemple, et par les points de division C', D', E', F', G', H', I', K', L', élevons des perpendiculaires à XY. Désignons respectivement par $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{11}$, les perpendiculaires ou ordonnées AA', CC', DD',..., BB', et par h la distance constante de deux ordonnées consécutives. C_1 étant le point où la corde AD coupe CC', on aura pour l'aire du trapèze rectiligne ADD'A'

$$\frac{h}{3}(AA' + DD' + 4C_1C');$$

mais ce trapèze est moindre que le trapèze curviligne ACDD'A', et il convient de l'augmenter; on est ainsi conduit à remplacer C_1C' par CC', et à prendre pour valeur approchée de l'aire du trapèze curviligne ACDD'A' l'expression

$$\frac{h}{3}(y_1 + y_3 + 4y_2).$$

En prenant de même

$$\frac{h}{3}(y_3 + y_5 + 4y_4), \quad \frac{h}{3}(y_5 + y_7 + 4y_6),$$
$$\frac{h}{3}(y_7 + y_9 + 4y_8), \quad \frac{h}{3}(y_9 + y_{11} + 4y_{10})$$

pour expressions des aires des trapèzes curvilignes DFF'D', FHH'F', HKK'H', KBB'K', et faisant la somme, on obtient pour valeur approchée de l'aire demandée

$$S = \frac{h}{3}[y_1 + y_{11} + 2(y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 4(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10})].$$

On retient aisément cette formule, attribuée à Simpson, en la mettant sous la forme

$$S = \frac{h}{3}(E + 2I + 4P), \qquad (2)$$

dans laquelle E désigne la somme des deux ordonnées extrêmes, I la somme des autres ordonnées de rang impair, et P la somme de toutes les ordonnées de rang pair.

Si l'arc AB était convexe dans toute son étendue vers la droite XY, une marche analogue conduirait à la même formule. Si cet arc était en partie concave et en partie convexe, en faisant passer une perpendiculaire à XY par le point d'inflexion, on mesurerait, d'après la règle précédente, les aires situées de part et d'autre de cette perpendiculaire et on en ferait la somme.

Pour le quart de cercle de rayon 1, on trouve, en divisant le rayon en

dix parties égales,

$$\begin{array}{llll} y_1 = 1 & y_3 = 0,980 & y_2 = 0,995 & S = 0^{mq},7818 \\ y_{11} = 0 & y_5 = 0,917 & y_4 = 0,954 & \\ & y_7 = 0,800 & y_6 = 0,866 & \\ & y_9 = 0,600 & y_8 = 0,714 & \\ & & y_{10} = 0,436 & \end{array}$$

La vraie valeur est $\frac{\pi}{4} = 0^{mq},7854$.

Volume approché d'un solide limité par une surface quelconque.

Nous démontrerons d'abord un théorème préliminaire :

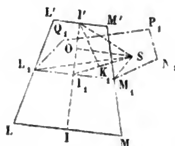
12. *Le volume de tout polyèdre ayant pour bases deux polygones quelconques situés dans des plans parallèles, et pour faces latérales des trapèzes ou des triangles, est exprimé par la formule*

$$(3) \qquad \frac{H}{3}(B + B' + 4B''),$$

dans laquelle H *désigne la demi-distance des deux plans parallèles,* B *la base inférieure du polyèdre,* B' *la base supérieure, et* B'' *la section équidistante des deux bases.*

En effet, soient $L_1M_1N_1P_1Q_1$ la section équidistante des bases (*fig.* 408)

Fig. 408.



et S un point pris à volonté dans l'intérieur de cette section. Le polyèdre peut être décomposé en pyramides ayant pour bases ses diverses faces et pour sommet commun le point S. Les volumes des deux pyramides qui reposent sur les bases B et B' ont évidemment pour mesures $\frac{BH}{6}$, $\frac{B'H}{6}$; et il reste à évaluer les volumes des pyramides qui reposent sur les faces latérales. Soit donc LMM'L' une quelconque de ces faces, par exemple celle qui répond au côté L_1M_1 du polygone $L_1M_1N_1P_1Q_1$; pour raisonner d'une manière générale, nous supposerons que cette face soit un trapèze (si c'était un triangle, l'un des côtés parallèles LM ou L'M' serait nul). Abaissons du point S la perpendiculaire SO sur le plan de la face LMM'L';

dans ce plan, menons par le point O la perpendiculaire $I'OI_1$ à L_1M_1; la droite SI_1 sera perpendiculaire à L_1M_1; enfin, menons $I'K_1$ perpendiculaire au plan de la section $L_1M_1N_1P_1Q_1$: $I'K_1$ sera la moitié de la distance H des bases du polyèdre. Cela posé, la pyramide SLMM'L' a pour mesure

$$L_1M_1 . 2I'I_1 \cdot \frac{1}{3} SO.$$

Or, le produit $I'I_1 . SO$ peut être remplacé par le produit $SI_1 . I'K_1$ qui, comme lui, exprime le double de l'aire du triangle $I'I_1S$; on a donc, pour le volume de la pyramide,

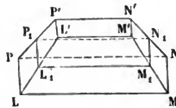
$$\frac{H}{3} 2 L_1M_1 . SI_1 = \frac{H}{3} \cdot 4\, SL_1M_1.$$

Donc, pour avoir la somme des volumes des pyramides qui reposent sur les faces latérales du polyèdre, il faut multiplier par $\frac{H}{3}$ quatre fois la somme des triangles qui ont S pour sommet commun et pour bases les côtés de la section $L_1M_1N_1P_1Q_1$, c'est-à-dire multiplier par $\frac{H}{3}$ quatre fois l'aire B'' de cette section.

13. Voici une première application de ce théorème.

Les amas de pierres, les fossés ou cuvettes établies de distance en distance le long des routes, les tombereaux, etc., sont terminés haut et bas par deux rectangles parallèles LMNP, L'M'N'P', et latéralement par quatre trapèzes LMM'L', MNN'M', NPP'N', PLL'P'. Exprimons le volume d'un pareil corps en fonction de la distance h des plans des deux rectangles et des dimensions a et b, a' et b', de ces rectangles (*fig.* 409).

Fig. 409.



La section $L_1M_1P_1Q_1$ équidistante des bases est un rectangle dont les dimensions L_1M_1, L_1P_1, sont évidemment égales à $\frac{1}{2}(a+a')$ et $\frac{1}{2}(b+b')$. Le volume du corps est donc, en vertu du théorème précédent, donné par la formule

$$\frac{h}{6}[ab + a'b' + (a+a')(b+b')],$$

que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$\frac{bh}{6}(2a+a') + \frac{b'h}{6}(2a'+a).$$

Pour $b' = 0$, le volume se réduit à

$$\frac{bh}{6}(2a + a'),$$

et le corps a la forme qu'on donne dans les parcs d'artillerie aux piles de boulets rectangulaires.

14. Comme seconde application, proposons-nous d'évaluer approximativement le volume compris entre une surface quelconque et deux sections latérales parallèles.

La formule (3) du n° 12 étant identique à la formule (1) du n° 11, si l'on fait entre les sections extrêmes un nombre impair de sections parallèles équidistantes, et si l'on répète pour les volumes le raisonnement qui nous a donné la formule de Simpson pour les aires, on trouve

$$V = \frac{H}{3}(E + 2I + 4P),$$

H désignant l'intervalle de deux sections consécutives, E la somme des aires des deux sections extrêmes, I la somme des autres sections de rang impair, et P la somme de toutes les sections de rang pair.

FIN.









